

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

**DIPLÔME DE DOCTEUR EN MÉTHODES D'APPROXIMATION
ET ALGORITHMES EN ANALYSE ET THÉORIE DES NOMBRES**

par

Louise BARTHELEMY

**APPLICATION DE LA THÉORIE DES SEMI-GROUPES NON
LINÉAIRES DANS L^∞ À L'ÉTUDE D'UNE CLASSE
D'INÉQUATIONS QUASI-VARIATIONNELLES**



Soutenue le 24 juin 1980, devant la Commission d'Examen :

J. ROBERT

Président

Ph. BENILAN
Mme Th. LACROIX
J.C. MIELLOU
J.P. PUEL

Examineurs

Duss
Besangon

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546609_0005

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

**DIPLOME DE DOCTEUR EN MÉTHODES D'APPROXIMATION
ET ALGORITHMES EN ANALYSE ET THÉORIE DES NOMBRES**

par

Louise BARTHELEMY

**APPLICATION DE LA THÉORIE DES SEMI-GROUPES NON
LINÉAIRES DANS L^∞ À L'ÉTUDE D'UNE CLASSE
D'INÉQUATIONS QUASI-VARIATIONNELLES**



Soutenue le 24 juin 1980, devant la Commission d'Examen :

J. ROBERT

Président

Ph. BENILAN
Mme Th. LACROIX
J.C. MIELLOU
J.P. PUEL

Examineurs

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ BESANÇON

Président : Monsieur le Professeur Pierre LÉVÊQUE

FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

DOYEN

M. le Professeur Jean BULABOIS
Physique Générale-optique

ASSESEURS

M. le Professeur Bernard MILLET
Botanique

M. Robert GUYETANT, Maître-Assistant
Biol. animale Ecologie

DOYENS HONORAIRES

MM. GLANGEAUD, JACQUEMAIN, CHATELET,
THIEBAUT, BERNARD

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. BENNETON, CHATELET, MESNAGE, QUANTIN
THEOBALD N., THIRY, TRILLAT, TRONCHET,
UEBERSFELD

MM. BANTEGNIE Robert	: Mathématiques
BENILAN Philippe	: Mathématiques
BERNARD Jean	: Chimie Physique
BIDAULT Michel	: Taxonomie expérimentale
BROQUET Paul	: Géologie
BRUCKERT Sylvain	: Ecologie végétale
BULABOIS Jean	: Physique Gle optique
CAPODANNO Pierre	: Mécanique théorique
CERUTTI Ernest	: Chimie appliquée
CHALEAT Raymond	: Mécanique appliquée
CHARDON J. Claude	: Spectroscopie
CHAUVE Pierre	: Géologie minéralogie
COUGNARD Jean	: Mathématiques
DEVIN Claude	: Chimie 1er cycle
DUBOUCHET Jacques	: Physiologie végétale
GALATRY Louis	: Physique moléculaire
GAUDEMER Yves	: Biochimie
GOMOT Lucien	: Zoologie-Embryologie
GOUARNE René	: Mathématiques
GRAS Georges	: Mathématiques
GREMILLARD Jean	: Mathématiques
KARCHE J. Paul	: Pétrographie Minéralogie
LALLEMENT Gérard	: Mécanique appliquée
LAUDE Bernard	: Chimie organique
LESAINTE Pierre	: Mathématiques I
LHOTE François	: Automatique
MERIGOUX Henri	: Cristallographie et Synthèses minérales

MIELLOU J. Claude	: Analyse numérique
MILLET Bernard	: Botanique
MONTAGNER Hubert	: Psychophysiologie
MOREELS Guy	: Astronomie
OLIVIER Marcel	: Electroniq. quantique
PARIZET Jean	: Mathématiques
PERROT Roger	: Chimie générale
PLUVINAGE Philippe	: Physique théorique
POTIER Robert	: Physique des sols
RANGHEARD Yves	: Géologie
REAL Pierre	: Ecologie animale
RIPPLINGER Jean	: Physiologie animale
ROBERT Daniel	: Physique
ROBERT Guy	: Electrochimie
ROBERT Jacques	: Mathématiques I
THEOBALD J. Gérard	: Spectroscopie hertzienne
THIEBAUT Jean	: Pétrogr. minéralogie
TREHEL Michel	: Informatique
VERNEAUX Jean	: Zoologie-Embryologie
VIENOT J. Charles	: Physique Gle optique
WEIL Michel	: Mathématiques

Responsable des services administratifs :

M. Jean-Marie RUNGE

Il n'est pas bien honnête, et pour beaucoup de causes,
Qu'une femme étudie, et sache tant de choses.

Former aux bonnes mœurs l'esprit de ses enfants,
Faire aller son ménage, avoir l'oeil sur ses gens,
Et régler la dépense avec économie,
Doit être son étude et sa philosophie.

Nos pères sur ce point étaient gens bien sensés,
Qui disaient qu'une femme en sait toujours assez
Quand la capacité de son esprit se hausse
A connaître un pourpoint d'avec un haut-de-chausse.

MOLIERE, Les Femmes Savantes,

Acte II, Scène VII.

Monsieur J. ROBERT a bien voulu m'accueillir au sein de l'Equipe d'Analyse Non Linéaire qu'il dirige. Il accepte, aujourd'hui, de présider le jury de cette thèse. Je suis heureuse que cette circonstance me permette de lui témoigner toute la gratitude qui lui revient !

Philippe BENILAN a orienté, puis dirigé cette recherche avec une patience et une indulgence inaltérables. Qu'il soit assuré de ma profonde reconnaissance !

Mes remerciements s'adressent ensuite à Madame M.Th. LACROIX, Messieurs J.C. MIELLOU et J.P. PUEL qui ont bien voulu examiner ce travail.

Collègues et amis apportent, de bien des manières, une aide précieuse lors de la confection d'un mémoire, à défaut de citer tous les membres de l'Equipe Bisontine d'Analyse Non Linéaire, j'aimerais remercier spécialement Francine CATTE dont la collaboration m'a été si précieuse.

La présentation matérielle de ce texte est l'oeuvre de Mademoiselle C. PAGANI et son tirage a été assuré par Monsieur R. VRANA. Qu'ils en soient remerciés !

INTRODUCTION

=====

Ce mémoire traite de la résolution de certaines Inéquations Quasi-Variationnelles (I. Q. V.). Il reprend et prolonge un travail effectué avec Francine Catté (cf. L. Barthélemy - F. Catté [3]).

Les méthodes utilisées : l'accrétivité et la théorie des semi-groupes non linéaires dans $L^\infty(\Omega)$ (Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^N$, ou plus généralement un espace mesuré), sont fort éloignés des techniques, plus classiques, de point fixe (pour une bibliographie, voir par exemple [16]).

Précisons le problème que nous allons aborder et esquissons la démarche que nous nous proposons de suivre :

Il s'agit de déterminer une solution de l'I. Q. V. (E), cette dernière s'écrivant *formellement* :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} + Au \leq 0 \\ u \leq Mu \\ \left(\frac{du}{dt} + Au \right) (u - Mu) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{array} \right.$$

(il s'agit d'une I. Q. V. d'évolution que l'on rencontre en contrôle impulsif (cf. Bensoussan-Lions [7])).

Formellement (E) peut être transformée en (E') :

$$(E') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} + Cu \ni 0, \\ u(0) = u_0 ; \end{array} \right.$$

où C est l'opérateur défini (toujours *formellement*...) par :

$$v \in Cu \text{ si et seulement si } \begin{cases} Au \leq v \\ u \leq Mu \\ (v - Au)(u - Mu) = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$Cu = Au + \beta(u - Mu)$$

où β est le graphe maximal monotone de $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$D(\beta) = \mathbb{R}^-$$

$$\beta(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0 \\ \mathbb{R}^+ & \text{si } r = 0. \end{cases}$$

Lorsque M est une contraction de $L^\infty(\Omega)$, l'opérateur $B = \beta(I - M)$ est (*formellement* !) accréatif dans $L^\infty(\Omega)$, c'est-à-dire :

$$\|u - \hat{u}\|_{L^\infty} \leq \|u - \hat{u} + \lambda(w - \hat{w})\|_{L^\infty} \text{ pour tout } \lambda > 0 \text{ et pour tout}$$

$$(u, w), (\hat{u}, \hat{w}) \in \text{Gr}(B).$$

Si l'on suppose, de plus, que A est un opérateur accréatif de $L^\infty(\Omega)$, l'opérateur $C = A + B$ est aussi, *formellement*, accréatif dans $L^\infty(\Omega)$. Ainsi C sera-t-il un générateur d'un semi-groupe $S(t)$ de contractions sur $\overline{D(C)}$ (au sens de la théorie des semi-groupes non linéaires), dès lors qu'il vérifiera une condition d'image (telle celle de Crandall-Liggett [14] : $R(I + \lambda C) \supset \overline{D(C)}$ pour tout $\lambda > 0$).

La fonction $u(t) = S(t)u_0$ sera alors *formellement* une solution pour l'I. Q. V. (E).

Le moins attentif de nos lecteurs n'aura pas manqué de noter que la démarche que nous proposons est purement *formelle* ! Pour qu'elle devienne effective, il nous faut, dans un premier temps, définir correctement l'opérateur C , qui doit être à la fois accréatif dans $L^\infty(\Omega)$ et vérifier une condition d'image. Ensuite, il conviendra de préciser en quel sens $u(t) = S(t)u_0$ est solution de l'I. Q. V. (E).

Ces deux exigences imposent le plan que nous avons suivi :

Après un premier chapitre (le chapitre 0) relatif à la mise en place de quelques rappels d'accrétivité, le chapitre I est consacré à l'opérateur C . Celui-ci est défini par sa résolvante $J_\lambda = (I + \lambda C)^{-1}$, où J_λ est l'application qui à $f \in L^\infty(\Omega)$ associe la solution maximum de l'I. Q. V. stationnaire (S), que l'on peut écrire *formellement* :

$$(S) \quad \begin{cases} u + \lambda A u \leq f \\ u \leq M u \\ (u + \lambda A u - f)(u - M u) = 0. \end{cases}$$

Nous montrons que la famille $\{J_\lambda, \lambda > 0\}$ définit un opérateur accréatif, à l'aide d'une méthode de pénalisation. Il s'agit d'approcher (S) par :

$$u_\epsilon + \lambda \left(A u_\epsilon + \frac{1}{\epsilon} (u_\epsilon - M u_\epsilon)^+ \right) = f$$

(Notons que cette technique n'est pas nouvelle puisqu'elle ne fait que reprendre des méthodes développées par Lions-Bensoussan [8]).

L'objet du chapitre II est l'étude de "la solution" de (E).

Nous y montrons essentiellement la coïncidence entre :

- la solution "au sens de la théorie des semi-groupes" :

$$u(t) = S(t) u_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} J_{t/n}^n(u_0);$$

- la limite de la solution de l'équation d'évolution pénalisée

$$\begin{cases} \frac{du_\epsilon}{dt} + A u_\epsilon + \frac{1}{\epsilon} (u_\epsilon - M u_\epsilon)^+ = 0 \\ u(0) = u_0; \end{cases}$$

- la "solution forte" maximum de l'I. Q. V. d'évolution (E).

(Notons que les résultats obtenus diffèrent, en particulier, de ceux de Mignot-Puel ([22]) dans le cas d'un opérateur linéaire).

Ce travail s'inscrit donc dans le champ de la théorie des semi-groupes non linéaires dans $L^\infty(\Omega)$. Il contribue à montrer que, pour des opérateurs A très généraux, la recherche d'une solution forte (dont

l'existence est ainsi mise en évidence) pour une I. Q. V. d'évolution, relève de ce cadre ; pourvu que la donnée initiale u_0 soit "assez régulière". Notons que ces opérateurs peuvent être, en particulier, fortement non linéaires (des exemples sont donnés dans le chapitre I).

Remarquons, enfin, que les hypothèses que nous faisons sur M relèvent du problème de la gestion des stocks :

$$Mu(x) = k + \inf_{y \geq x} u(y) \quad (\text{cf. [7]}).$$

* _ * _ * _ * _ * _ *

TABLE DES MATIERES

=====

	page
<u>CHAPITRE 0</u> : Opérateurs T-accrétifs	1
<u>CHAPITRE I</u> : Problème stationnaire	9
0 - Données du Problème, Notations et définitions.....	9
I - Les opérateurs C_ϵ	14
II - L'opérateur C	19
III - Exemples	28
IV - Propriétés particulières de l'opérateur C	40
1) Unicité.....	40
2) Fermeture.....	41
<u>CHAPITRE II</u> : Problème d'évolution	46
I - Semi-groupes.....	46
1) Semi-groupe associé à C	46
2) Semi-groupe associé à C_ϵ	49
3) Théorème 1.....	51
II - I, Q, V, d'évolution.....	54
Théorème 2 : existence d'une "solution forte"..	56
III - Résultats de maximalité et d'unicité.....	64
1) Maximalité.....	64
2) Unicité.....	70
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	72

- CHAPITRE 0 -

OPERATEURS T-ACCREDITIFS

=====

Nous donnons dans ce chapitre préliminaire des définitions et des rappels de certaines propriétés des opérateurs accréatifs et T-accréatifs.

Un opérateur d'un espace de Banach X est une application de X dans $\mathcal{P}(X)$, ensemble des parties de X . Nous identifierons souvent un opérateur A avec son graphe dans $X \times X$, c'est-à-dire l'ensemble $\{(x, y) \in X \times X / y \in Ax\}$.

Nous notons A^{-1} l'opérateur dont le graphe est symétrique de celui de A ; $\overline{A}$ l'adhérence (ou fermeture) dans $X \times X$ du graphe de A ; pour tout λ réel λA le graphe $\{(x, y) \in X \times X / y \in \lambda Ax\}$; si B est un autre opérateur, nous notons $A + B = \{(x, y) \in X \times X / y \in Ax + Bx\}$.

Le domaine d'un opérateur A de X , soit $\{x \in X / Ax \neq \emptyset\}$ sera noté $D(A)$ et son image, soit $\bigcup_{x \in X} Ax$, sera notée $R(A)$.

Nous notons F l'opérateur de dualité de X dans son dual X' défini par :

$$(0.1) \quad \forall x \in X \quad F(x) = \{w \in X' / \|w\|_{X'} = 1 \text{ et } \langle w, x \rangle_{X', X} = \|x\|_X\}.$$

DEFINITION 0.1 : Un opérateur A de X est accréatif s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes (cf. Bénéilan [4])

i) pour tout $\lambda > 0$, pour tout $(x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in A$

$$(0.2) \quad \|x - \hat{x}\|_X \leq \|x - \hat{x} + \lambda(y - \hat{y})\|_X$$

(0.3)

- ii) pour tout $\lambda > 0$, $J_\lambda^A = (I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction de $D(J_\lambda^A) = R(I + \lambda A)$ sur $D(A)$ (I étant l'identité de X)
- iii) pour tout (x, y) , $(\hat{x}, \hat{y}) \in A$, il existe $w \in F(x - \hat{x})$ tel que $\langle w, y - \hat{y} \rangle_{X', X} \geq 0$.

(0.4)

Si A est accréatif il est immédiat que J_λ^A vérifie pour tout $\lambda > 0$:

$$J_\lambda^A f = J_\mu^A \left(\frac{\mu}{\lambda} f + \frac{\lambda - \mu}{\lambda} J_\lambda^A f \right) \text{ pour tout } f \in R(I + \lambda A) \text{ et tout } \mu > 0.$$

DEFINITION 0.2 : Un opérateur A de X est m-accréatif s'il vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes (cf. Bénéilan [4])

- i) pour tout $\lambda > 0$, $J_\lambda^A = (I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction partout définie.
- ii) A est accréatif, et il existe $\lambda > 0$ tel que $X = R(I + \lambda A)$.

Si A est accréatif rappelons (cf. [4]) que pour tout $\lambda > 0$

l'approximation de Yosida de A définie par : $A_\lambda = \frac{I - J_\lambda^A}{\lambda}$ a les propriétés suivantes :

- i) pour tout $\lambda > 0$, A_λ est univoque, accréative et lipschitzienne de rapport $\frac{2}{\lambda}$,
- ii) pour tout $\lambda > 0$ $A_\lambda \subset A J_\lambda$,
- iii) pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in D(A_\lambda) \cap D(A)$, $\|A_\lambda x\|_X \leq \|Ax\|$,
(où $\|Ax\| = \inf \{\|y\|_X / y \in Ax\}$)
- iv) si de plus A est m-accréatif, alors pour tout $\lambda > 0$, A_λ est m-accréative et partout définie.

(0.5)

DEFINITIONS 0.3 : Si X est un espace de Banach réticulé ⁽¹⁾

1) une application ψ de $Y \subset X$ dans X est une T-contraction si

$$\|(\psi(x) - \psi(\hat{x}))^+\|_X \leq \|(x - \hat{x})^+\|_X \text{ pour tout } x, \hat{x} \in Y$$

où $v^+ = \sup(v, 0)$

(1) un ensemble ordonné X est réticulé si $\forall x, y \in X$, $\sup(x, y)$ et $\inf(x, y)$ existent dans X

2) un opérateur A de X est T-accrétif s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

i) pour tout $\lambda > 0$, tout $(x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in A$

(0.6)

$$\|(x - \hat{x})^+\|_X \leq \|(x - \hat{x} + \lambda(y - \hat{y}))^+\|_X$$

ii) pour tout $\lambda > 0$, $J_\lambda^A = (I + \lambda A)^{-1}$ est une T-contraction de $R(I + \lambda A)$ sur $D(A)$

3) un opérateur A de X est m-T-accrétif s'il vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

i) A est T-accrétif et pour tout $\lambda > 0$, $R(I + \lambda A) = X$

ii) pour tout $\lambda > 0$, J_λ^A est une T-contraction partout définie.

REMARQUES 0.1 : Si $X = L^p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq \infty$) est l'espace de Lebesgue classique associé à un espace mesuré Ω , muni de la norme $\|\cdot\|_p$ usuelle,

1) une T-contraction ψ de $L^p(\Omega)$ est une contraction croissante c'est-à-dire,

$$i) \|\psi(u) - \psi(\hat{u})\|_p \leq \|u - \hat{u}\|_p \quad \forall u, \hat{u} \in Y;$$

$$ii) u \leq \hat{u} \text{ dans } L^p(\Omega) \Rightarrow \psi(u) \leq \psi(\hat{u}) \text{ dans } L^p(\Omega);$$

2) il en résulte qu'un opérateur T-accrétif est accrétif et pour tout $\lambda > 0$

J_λ^A est une contraction croissante.

En effet, ii) est immédiat d'après (0.5) et $u \leq \hat{u} \Leftrightarrow (u - \hat{u})^+ = 0$.

i) résulte de :

$$\|u\|_p^p = \|u^+\|_p^p + \|u^-\|_p^p \quad \text{si } p \text{ est fini}$$

$$\|u\|_\infty = \sup (\|u^+\|_\infty, \|u^-\|_\infty)$$

$$\text{où } u^- = \sup (-u, 0) = (-u)^+.$$

PROPOSITION 0.1 : Dans $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, un opérateur A est T-accrétif si et seulement si :

pour tout $(u, v), (\hat{u}, \hat{v}) \in A$

(0.7)

$$\int_\Omega (v - \hat{v}) [(u - \hat{u})^+]^{p-1} \geq 0.$$

preuve : d'après (0.6) A est T-accrétif si et seulement si pour tout $(u, v), (\hat{u}, \hat{v}) \in A$

(0.8)

$$\int_\Omega [(u - \hat{u})^+]^p \leq \int_\Omega [(u - \hat{u} + \lambda(v - \hat{v}))^+]^p \quad \forall \lambda > 0.$$

L'application $u \mapsto \int_{\Omega} [u^+]^p$ étant convexe et posant :

$\bar{u} = u - \hat{u}$, $\bar{v} = v - \hat{v}$, (0.8) est équivalent à :

0.9)

$$\inf_{\lambda > 0} \frac{\int [(\bar{u} + \lambda \bar{v})^+]^p - \int (\bar{u}^+)^p}{\lambda} = \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{\int [(\bar{u} + \lambda \bar{v})^+]^p - \int (\bar{u}^+)^p}{\lambda} \geq 0$$

or pour presque tout $x \in \Omega$

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \frac{[(\bar{u} + \lambda \bar{v})^+(x)]^p - [\bar{u}^+(x)]^p}{\lambda} = \begin{cases} p \bar{u}^+(x)^{p-1} \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{(\bar{u} + \lambda \bar{v})^+(x) - \bar{u}^+(x)}{\lambda} & \text{si } \bar{u}(x) > 0 \\ 0 & \text{si } \bar{u}(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$= p \bar{u}^+(x)^{p-1} \bar{v}(x),$$

alors par le théorème de convergence monotone :

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \frac{\int [(\bar{u} + \lambda \bar{v})^+]^p - \int (\bar{u}^+)^p}{\lambda} = p \int_{\Omega} [\bar{u}^+]^{p-1} \bar{v}$$

donc (0.9) est équivalent à (0.7). *

Nous allons maintenant donner un résultat sur la somme de certains opérateurs T-accrétifs. Plus généralement :

PROPOSITION 0.2 : Soient X un espace de Banach, A un opérateur m -accrétif de X et B une application lipschitzienne de rapport $k > 0$ partout définie sur X , alors :

1) pour tout λ tel que $0 < \lambda k < 1$, $J_{\lambda}^{A+B} = (I + \lambda (A+B))^{-1}$ est une application (univoque) partout définie sur X .

2) Si φ est une application convexe s. c. i. définie sur X à valeurs dans $]-\infty, \infty]$ telle que :

0.10) $\varphi(u) \leq \varphi(u + \lambda v) \quad \forall (u, v) \in A \cup B \quad \forall \lambda > 0;$

si de plus B est accrétif, alors pour tout $\lambda > 0$

0.11) $\varphi(u) \leq \varphi(u + \lambda (v + Bu)) \quad \forall (u, v) \in A.$

COROLLAIRE : X, A, B vérifient les hypothèses de la proposition 0.2, B étant accrétif.

Si $\varphi : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est une application convexe s. c. i. telle que

$$\varphi(u - \hat{u}) \leq \varphi(u - \hat{u} + \lambda (v - \hat{v})) \quad \forall ((u, v), (\hat{u}, \hat{v})) \in A \times A \cup B \times B \quad \forall \lambda > 0.$$

Alors :

$$\varphi(u - \hat{u}) \leq \varphi(u - \hat{u} + \lambda (v + Bu - \hat{v} - B\hat{u})) \quad \forall (u, v), (\hat{u}, \hat{v}) \in A \quad \forall \lambda > 0$$

en particulier, $A+B$ est m -accrétif.

Si de plus, X est réticulé tel que $u \mapsto \|u^+\|$ est convexe s. c. i., A et B T-accrétifs alors $A+B$ est m -T-accrétif.

REMARQUE 0.2 : Si $X = L^p(\Omega)$ $1 \leq p \leq +\infty$, alors $u \mapsto \|u^+\|_p$ est continue et convexe. Alors le corollaire montre que la somme d'un opérateur m - T -accrétif et d'un opérateur T -accrétif lipschitzien est m - T -accrétive.

Cependant pour $1 < p < +\infty$, la proposition 0.1 montre d'une manière immédiate que la somme de deux opérateurs T -accrétifs est T -accrétive.

REMARQUE 0.3 : Kobayashi [18], Crandall [13], Martin [21], Pierre [23] entre autres donnent des résultats plus généraux sur la somme d'opérateurs accrétifs.

démonstration du corollaire :

On se ramène à la proposition en posant :

$\mathfrak{X} = X \times X$, c'est un espace de Banach pour la norme $\|(u, v)\| = \|u\|_X + \|v\|_X$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Φ définie par $\Phi(u, v) = \varphi(u - v)$.

On vérifie aisément que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux opérateurs de $\mathfrak{X}$ vérifiant les mêmes hypothèses que A et B respectivement et que Φ est une application convexe s. c. i. définie sur $\mathfrak{X}$ et vérifie l'hypothèse (0.10) ; on vérifie alors sans problème le premier résultat du corollaire. En prenant pour

$\varphi : u \mapsto \varphi(u) = \|u\|_X$ nous obtenons l'accrétivité de $A+B$, la m -accrétivité

résultant alors de 1) de la proposition 0.2. Si de plus A et B sont T -accrétifs et si $\varphi : u \mapsto \|u^+\|_X$ est convexe s. c. i., nous obtenons la T -accrétivité de

$A+B$ ce qui, joint à la m -accrétivité, donne la m - T -accrétivité de $A+B$.

*

démonstration de la proposition 0.2 : Nous noterons pour simplifier $\| \cdot \|$ au lieu de $\| \cdot \|_X$.

Soit λ tel que $0 < \lambda k < 1$ et soit $f \in X$.

Nous avons les équivalences :

$$u + \lambda Au + \lambda Bu \ni f$$

$$\Leftrightarrow u + \lambda Au \ni f - \lambda Bu$$

$$\Leftrightarrow u = J_{\lambda}^A(f - \lambda Bu) \quad (\text{par accrétivité de } A).$$

Or l'application T_f définie par $T_f(v) = J_{\lambda}^A(f - \lambda Bv)$ est une application

contractante partout définie sur X , en effet par hypothèses sur A et B ,
 $\|T_f v_1 - T_f v_2\| \leq \lambda \|B v_1 - B v_2\| \leq \lambda k \|v_1 - v_2\|$.

Donc T_f admet un unique point fixe u dans X c'est-à-dire tel que

$u = J_\lambda^A(f - \lambda B u)$, ce qui achève la démonstration de 1).

Pour montrer 2) nous utiliserons les lemmes suivants :

(0.12) $\left[\begin{array}{l} \text{LEMME 0.1 : Les hypothèses sur } X, A, B \text{ et } \varphi \text{ étant celles de la proposi-} \\ \text{tion, pour tout } \mu > 0 \text{ et tout } \lambda > 0, \text{ nous avons :} \\ \varphi(u) \leq \varphi\left(u + \lambda \left(A_\mu u + B u\right)\right) \quad \forall u \in X. \end{array} \right.$

$\left[\begin{array}{l} \text{LEMME 0.2 : Les hypothèses sur } X, A \text{ et } B \text{ étant celles de la proposi-} \\ \text{tion 0.2, pour tout } \lambda > 0 \text{ tel que } \lambda k < 1 \text{ et tout } f \in X \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} J_\lambda^{A_\mu + B}(f) = J_\lambda^{A+B}(f). \end{array} \right.$

Supposons ces lemmes et achevons de démontrer la proposition.

Remarquons qu'il suffit de montrer (0.11) pour des λ petits, en effet la convexité de φ entraîne :

$$\frac{\varphi(x + \lambda y) - \varphi(x)}{\lambda} \leq \frac{\varphi(x + \mu y) - \varphi(x)}{\lambda} \quad \text{pour } 0 < \lambda < \mu.$$

Donc, soit λ tel que $\lambda k < 1$, alors d'après 1) de la proposition, (0.11) est équivalent à :

$$(0.13) \quad \varphi\left(J_\lambda^{A+B} f\right) \leq \varphi(f) \quad \forall f \in X$$

or pour tout μ l'approximation de Yosida A_μ est m -accrétive comme A et partout définie (cf. les propriétés de A_μ), et toujours d'après 1) de la

proposition 0.2 $J_\lambda^{A_\mu + B}$ est une application partout définie et (0.12) est alors équivalent à :

$$(0.14) \quad \varphi\left(J_\lambda^{A_\mu + B} f\right) \leq \varphi(f) \quad \forall f \in X$$

alors φ étant s. c. i. (0.13) résulte des lemmes 0.1 et 0.2.

*

démonstration du lemme 0.1 :

Comme nous l'avons déjà remarqué, il suffit de montrer (0.12) pour des λ tels que $0 < \lambda k < 1$. Fixons-nous un tel λ .

Nous avons vu que (0.12) était équivalent à :

$$(0.14) \quad \varphi\left(J_{\lambda}^{A+B} f\right) \leq \varphi(f) \quad \forall f \in X.$$

Fixons-nous $f \in X$ et notons $u_{\mu} = J_{\lambda}^{A+B} f$.

Nous avons les égalités suivantes :

$$u_{\mu} + \lambda A_{\mu} u_{\mu} + \lambda B u_{\mu} = f$$

$$u_{\mu} + \frac{\lambda}{\mu} \left(u_{\mu} - J_{\mu}^A u_{\mu} \right) + \lambda B u_{\mu} = f$$

$$u_{\mu} + \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} B u_{\mu} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} f + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} J_{\mu}^A u_{\mu}$$

B étant accréatif :

$$u_{\mu} = T_f u_{\mu}$$

où T_f définie par $T_f v = J_{\alpha}^B \left(\frac{\alpha}{\lambda} f + \frac{\alpha}{\mu} J_{\mu}^A v \right)$, avec $\alpha = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}$, est une application contractante de X dans X ; en effet l'accréativité de A et B entraîne :

$$\|T_f v_1 - T_f v_2\| \leq \frac{\alpha}{\mu} \|J_{\mu}^A v_1 - J_{\mu}^A v_2\| \leq \frac{\alpha}{\mu} \|v_1 - v_2\| \quad \text{avec} \quad \frac{\alpha}{\mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} < 1.$$

Alors d'après le théorème des approximations successives :

$$u_{\mu} = \lim_n T_f^n f$$

φ étant s. c. i. pour avoir (0.14) il suffit de montrer que pour tout n :

$$\varphi\left(T_f^n f\right) \leq \varphi(f).$$

Montrons-le par récurrence :

Pour $n = 0$ c'est trivial. Supposons l'inégalité vraie au rang n.

D'après (0.10) nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi\left(T_f^{n+1} f\right) &= \varphi\left(J_{\alpha}^B \left(\frac{\alpha}{\lambda} f + \frac{\alpha}{\mu} J_{\mu}^A \left(T_f^n f \right) \right)\right) \leq \varphi\left(\frac{\alpha}{\lambda} f + \frac{\alpha}{\mu} J_{\mu}^A \left(T_f^n f \right) \right) \\ &\leq \frac{\alpha}{\lambda} \varphi(f) + \frac{\alpha}{\mu} \varphi\left(J_{\mu}^A \left(T_f^n f \right)\right) \quad (\varphi \text{ convexe}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi\left(T_f^{n+1} f\right) &\leq \frac{\alpha}{\lambda} \varphi(f) + \frac{\alpha}{\mu} \varphi\left(T_f^n f\right) \\ &\leq \frac{\alpha}{\lambda} \varphi(f) + \frac{\alpha}{\mu} \varphi(f) = \varphi(f). \end{aligned}$$

*

démonstration du lemme 0.2 :

Soient $\lambda > 0$ tel que $\lambda k < 1$ et $f \in X$.

$$\text{Notons } u_{\mu} = J_{\lambda}^{A+B} (f)$$

$$u = J_{\lambda}^{A+B} (f)$$

u_μ et u vérifient :

$$(0.15) \begin{cases} u_\mu + \lambda A_\mu u_\mu + \lambda B u_\mu = f \\ u + \lambda v + \lambda B u = f \quad \text{où } v \in A u. \end{cases}$$

Rappelons que $A_\mu u_\mu \in A J_\mu^A u_\mu$

A étant accréatif soit $w \in F(u - J_\mu^A u_\mu)$ tel que

$$(0.16) \quad \langle w, v - A_\mu u_\mu \rangle_{X', X} \geq 0 \quad (\text{cf. (0.1) et (0.3)}).$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \|u - J_\mu^A u_\mu\| &= \langle w, u - J_\mu^A u_\mu \rangle \\ &= \langle w, u - u_\mu \rangle + \langle w, u_\mu - J_\mu^A u_\mu \rangle \\ &= \lambda \langle w, A_\mu u_\mu - v \rangle + \lambda \langle w, B u_\mu - B u \rangle + \langle w, u_\mu - J_\mu^A u_\mu \rangle \text{ d'après (0.15)} \\ &\leq \lambda \langle w, B u_\mu - B u \rangle + \langle w, u_\mu - J_\mu^A u_\mu \rangle \text{ d'après (0.16)} \\ &\leq \lambda k \|u_\mu - u\| + \|u_\mu - J_\mu^A u_\mu\| \quad (\text{car } \|w\|_{X'} = 1) \end{aligned}$$

or

$$\|u - u_\mu\| \leq \|u - J_\mu^A u_\mu\| + \|J_\mu^A u_\mu - u_\mu\|, \text{ d'où}$$

$$(1 - \lambda k) \|u - u_\mu\| \leq 2 \|u_\mu - J_\mu^A u_\mu\| \quad \text{ou encore par définition de } A_\mu$$

$$\|u - u_\mu\| \leq \frac{2}{1 - \lambda k} \mu \|A_\mu u_\mu\|$$

il suffit donc pour achever la démonstration du lemme de montrer que $\{A_\mu u_\mu, \mu > 0\}$ est borné dans X .

Il suffit d'après (0.15) et l'inégalité :

$$\|B u_\mu\| \leq \|B u_\mu - B u\| + \|B u\| \leq k \|u_\mu - u\| + \|B u\|,$$

de montrer que $\{u_\mu, \mu > 0\}$ est borné dans X .

A_μ étant partout défini, soit $f_\mu \in X$ défini par :

$$u + \lambda A_\mu u + \lambda B u = f_\mu.$$

Par accréativité de $A_\mu + B$, nous avons :

$$\|u_\mu - u\| \leq \|f_\mu - f\|$$

$$\text{or } \|A_\mu u\| \leq \|A u\| \quad (\text{cf. rappels sur les } A_\lambda)$$

cela entraîne que $\{f_\mu, \mu > 0\}$ (et donc $\{u_\mu, \mu > 0\}$) est borné dans X .

- CHAPITRE 1 -

PROBLEME STATIONNAIRE =====

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la résolution, par des méthodes de T-accroissement dans $L^\infty(\Omega)$, d'une IQV stationnaire, ce qui nous permettra de construire un opérateur T-accroissant de $L^\infty(\Omega)$ auquel nous pourrions associer, dans le chapitre 2, un semi-groupe de T-contractions que nous utiliserons pour résoudre une IQV d'évolution.

0. DONNEES DU PROBLEME - NOTATIONS ET DEFINITIONS :

Soit Ω un espace mesuré de mesure finie. Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ est l'espace de Lebesgue classique associé à Ω , muni de la norme $\|\cdot\|_p$ usuelle et $L^p(\Omega)^+$ est le cône formé des u appartenant à $L^p(\Omega)$ tels que $u \geq 0$ ⁽¹⁾.

DEFINITION 1.1 : Nous dirons que $u = L^\infty_+ \lim_{n \uparrow} u_n$ si :

- i) $u \in L^\infty(\Omega)$, $u_n \in L^\infty(\Omega)$ pour tout n .
- ii) la suite $(u_n, n \in \mathbb{N})$ tend en décroissant, presque partout vers u quand $n \rightarrow \infty$.

REMARQUE : Si $u = L^\infty_+ \lim_{n \uparrow} u_n$ alors par convergence dominée $u_n \rightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$.

(1) dans tout ce chapitre, les inégalités entre éléments de $L^p(\Omega)$ sont des inégalités presque partout (p. p.).

Soit $\underline{M}$ une application de $L^\infty(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$ vérifiant les hypothèses suivantes :

- (M₁) M est une T -contraction partout définie sur $L^\infty(\Omega)$ telle que $M(0) \geq 0$.
- (M₂) Si $u = L_*^\infty \lim_{n \nearrow} u_n$ alors $Mu = L_*^\infty \lim_{n \nearrow} Mu_n$.

$\underline{V}$ désigne un espace de Banach réflexif de dual V' vérifiant les hypothèses suivantes :

- (V₁) $V \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow V'$
plus précisément V s'injecte continuellement dans $L^2(\Omega)$ et est dense dans $L^2(\Omega)$, de telle sorte que $L^2(\Omega)$ s'injecte continuellement dans V' .
- (V₂) Pour tout $u \in V$ et tout $p \in P_0$, $p(u) \in V$
où $P_0 = \{p \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}) / 0 \leq p' \leq 1, p(0) = 0\}$
où $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions lipschitziennes bornées sur $\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{A}$ une application de V dans V' vérifiant :

- (H₁) $\mathcal{A}$ est monotone, hémicontinue et $\mathcal{A}0 = 0$
plus précisément si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne la dualité V', V
 $\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}\hat{u}, u - \hat{u} \rangle \geq 0 \quad \forall u, \hat{u} \in V$ (monotonie)
 $\lim_{t \searrow 0} \langle \mathcal{A}((1-t)u + t\hat{u}), v \rangle = \langle \mathcal{A}u, v \rangle \quad \forall u, \hat{u}, v \in V$ (hémicontinuité)

Soit φ une application de V dans $[0, +\infty]$ vérifiant :

- (H₂) φ est convexe s. c. i. (semi continue inférieurement) et $\varphi(0) = 0$.
Nous noterons $D(\varphi)$ le sous-ensemble suivant de V :

$$D(\varphi) = \{u \in V / \varphi(u) < +\infty\}.$$

Nous supposerons, en outre, que $\mathcal{A}$ et φ vérifient les deux autres hypothèses suivantes, (H₃) correspondant à un principe du maximum (cf. Bénilan [6]) et une hypothèse de coercivité (H₄).

- (H₃) $\begin{cases} \varphi(u) + \varphi(\hat{u}) + \langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}\hat{u}, p(u - \hat{u}) \rangle \geq \varphi(u - p(u - \hat{u})) + \varphi(\hat{u} + p(u - \hat{u})) \\ \text{pour tout } p \in P_0 \text{ et tout } u, \hat{u} \in V. \end{cases}$

- (H₄) $\begin{cases} \text{Pour tout } u_0 \in D(\varphi), \text{ il existe } c \in \mathbb{R} \text{ tel que :} \\ \lim_{\|u\|_V \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u) + \langle \mathcal{A}u, u - u_0 \rangle + c\|u\|_2^2}{\|u\|_V} = +\infty. \end{cases}$

REMARQUES 1.1 : sur l'hypothèse (H_4)

1) Si (H_4) est vérifiée, alors pour tout $u_0 \in D(\varphi)$ nous avons :

$$H_4(u_0) \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } c \in \mathbb{R} \text{ tel que :} \\ \lim_{\|u\|_V \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u) - \varphi(u_0) + \langle \mathcal{A}u, u - u_0 \rangle + c \|u - u_0\|_2^2}{\|u - u_0\|_V} = +\infty. \end{array} \right.$$

$$(H_4') \left\{ \begin{array}{l} 2) \exists c \in \mathbb{R}, \exists \alpha \geq 1 \text{ tels que} \\ \lim_{\|u\|_V \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u) + \langle \mathcal{A}u, u \rangle + c \|u\|_2^2}{\|u\|_V^\alpha} = +\infty \\ \text{et} \\ \overline{\lim}_{\|u\|_V \rightarrow \infty} \frac{\|\mathcal{A}u\|_{V'}}{\|u\|_V^\alpha} < +\infty \end{array} \right.$$

implique (H_4) .

3) Si $\mathcal{A}$ est linéaire

$$(H_4'') \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } u_0 \in V, \text{ il existe } c \in \mathbb{R} \text{ tels que :} \\ \lim_{\|u\|_V \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u) + \langle \mathcal{A}u, u - u_0 \rangle + c \|u\|_2^2}{\|u\|_V} = +\infty \end{array} \right.$$

est équivalent à (H_4) .

En effet pour $u_0 \in V$ et $c \in \mathbb{R}$, nous avons les relations suivantes :

$$\frac{\varphi(u) - \varphi(u_0) + \langle \mathcal{A}u, u - u_0 \rangle + c \|u - u_0\|_2^2}{\|u - u_0\|_V} =$$

$$\left(\frac{\varphi(u) + \langle \mathcal{A}u, u - u_0 \rangle + c \|u\|_2^2}{\|u\|_V} \right) \frac{\|u\|_V}{\|u - u_0\|_V} + \frac{c (\|u - u_0\|_2^2 - \|u\|_2^2)}{\|u - u_0\|_V} - \frac{\varphi(u_0)}{\|u - u_0\|_V}.$$

Alors $H_4(u_0)$ résulte de (H_4) et de

$$\frac{c [\|u - u_0\|_2^2 - \|u\|_2^2]}{\|u - u_0\|_V} = \frac{c [2 \langle u_0, u_0 - u \rangle - \|u_0\|_2^2]}{\|u - u_0\|_V} \geq \frac{-c \|u_0\|_2^2}{\|u - u_0\|_V} - 2|c| \|u_0\|_{V'}$$

$$\text{et } \lim_{\|u\|_V \rightarrow \infty} \frac{\|u\|_V}{\|u - u_0\|_V} = 1.$$

Si φ et $\mathcal{A}$ vérifient (H_4') , pour avoir (H_4) il suffit de montrer que

$$\forall u_0 \in V \quad \lim_{\|u\|_V \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u) + \langle \mathcal{A}u, u - u_0 \rangle + c \|u\|_2^2}{\|u\|_V^\alpha} = +\infty.$$

Or cela se déduit de H_4' et de $\frac{-\langle \mathcal{A}u, u_0 \rangle}{\|u\|_V^\alpha} \geq \frac{-\|\mathcal{A}u\|_{V'}}{\|u\|_V^\alpha} \|u_0\|_V.$

D'autre part si $\mathcal{A}$ est linéaire, u_0 et $u_1 \in V$ nous avons

$$\langle \mathcal{A}u, u - u_1 \rangle = 2 \langle \mathcal{A} \frac{u}{2}, u - u_1 \rangle = 2 [\langle \mathcal{A} \frac{u}{2}, \frac{u}{2} - u_0 \rangle + \langle \mathcal{A} \frac{u}{2}, \frac{u}{2} + u_0 - u_1 \rangle]$$

et par monotonie de $\mathcal{A}$:

$$\langle \mathcal{A}u, u - u_1 \rangle \geq 2 \langle \mathcal{A} \frac{u}{2}, \frac{u}{2} - u_0 \rangle + 2 \langle \mathcal{A}(u_1 - u_0), \frac{u}{2} + u_0 - u_1 \rangle$$

d'où, φ étant convexe

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(u) + \langle \mathcal{A}u, u - u_1 \rangle + \frac{c}{2} \|u\|_2^2}{\|u\|_V} &\geq \frac{\varphi(\frac{u}{2}) + \langle \mathcal{A} \frac{u}{2}, \frac{u}{2} - u_0 \rangle + c \|\frac{u}{2}\|_2^2}{\|\frac{u}{2}\|_V} \\ &\quad - \frac{\|\mathcal{A}(u_1 - u_0)\|_V, \|\frac{u}{2} + u_0 - u_1\|_V}{\|\frac{u}{2}\|_V} \end{aligned}$$

alors si (H_4'') est vérifiée avec u_0 et c , alors (H_4) est vérifiée avec $\frac{c}{2}$ pour tout $u_1 \in V$.

*

Nous utiliserons le lemme suivant : (cf. Brézis [10]).

$$\left[\begin{array}{l} \text{LEMME 1.1 : Toute application } \mathcal{A} \text{ monotone hémicontinue de } V \text{ dans } V' \text{ est :} \\ \text{i) } \underline{\text{pseudo monotone}} \text{ c'est-à-dire :} \\ \left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow u \text{ dans } V \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}u_n, u_n - u \rangle \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}u_n \rightarrow \mathcal{A}u \text{ dans } V' \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}u_n, u_n \rangle = \langle \mathcal{A}u, u \rangle. \end{array} \right. \\ \text{ii) } \underline{\text{maximale monotone}} \text{ c'est-à-dire :} \\ \langle \mathcal{A}v - \xi, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V \Rightarrow \xi = \mathcal{A}u. \end{array} \right.$$

preuve : i) Soit une suite $\{u_n\} \subset V$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans V

et $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}u_n, u_n - u \rangle \leq 0$. Nous avons :

$\langle \mathcal{A}u_n, u_n - u \rangle \geq \langle \mathcal{A}u, u_n - u \rangle$ par monotonie de $\mathcal{A}$. On en déduit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}u_n, u_n - u \rangle = 0.$$

Soit $v \in V$ et $t > 0$,

$\langle \mathcal{A}u_n, u_n - u + tv \rangle \geq \langle \mathcal{A}(u - tv), u_n - u + tv \rangle$ par monotonie,

faisons tendre n vers l'infini et divisons par t , il vient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}u_n, v \rangle \geq \langle \mathcal{A}(u - tv), v \rangle$$

et quand $t \rightarrow 0$, par hémicontinuité de $\mathcal{A}$, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}u_n, v \rangle \geq \langle \mathcal{A}u, v \rangle \quad \forall v \in V$$

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}u_n, v \rangle = \langle \mathcal{A}u, v \rangle \quad \forall v \in V$, c'est-à-dire

$\mathcal{A}u_n \rightarrow \mathcal{A}u$ dans V' .

D'autre part : $\langle \mathcal{A}u_n, u_n \rangle = \langle \mathcal{A}u_n, u_n - u \rangle + \langle \mathcal{A}u_n, u \rangle$

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}u_n, u_n \rangle = \langle \mathcal{A}u, u \rangle$.

ii) Supposons $\langle \mathcal{A}v - \xi, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$.

Alors $\forall v \in V$ et $\forall t > 0$ nous avons :

$$\langle \mathcal{A}((1-t)u + tv) - \xi, t(v - u) \rangle \geq 0$$

divisons par t et faisons tendre $t \rightarrow 0$, l'hémicontinuité donne :

$$\langle \mathcal{A}u - \xi, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$$

d'où $\mathcal{A}u = \xi$.

*

I. LES OPERATEURS C_ϵ :

Notons $\partial\varphi$ le sous-différentiel de φ , opérateur maximal monotone (cf. Brézis [10]) de V dans V' défini par :

$$(u, v) \in \partial\varphi \Leftrightarrow \varphi(w) \geq \varphi(u) + \langle v, w - u \rangle \quad \forall w \in V.$$

Nous introduisons l'opérateur A de $L^\infty(\Omega)$ défini par :

$$A = (\partial\varphi + \mathcal{A}) \cap L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$$

plus précisément, compte tenu de la définition de $\partial\varphi$:

$$(1.1) \quad (u, v) \in A \Leftrightarrow \begin{cases} (u, v) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \\ \varphi(w) + \langle \mathcal{A}u, w - u \rangle \geq \varphi(u) + \int_\Omega v(w - u) \quad \forall w \in V. \end{cases}$$

LEMME 1.2 : A est un opérateur T -accrétif de $L^p(\Omega)$ pour $1 < p \leq \infty$ et m - T -accrétif de $L^\infty(\Omega)$.

preuve : D'après la propriété, $\lim_{p \rightarrow \infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty$ pour tout $u \in L^\infty(\Omega)$

il nous suffit de montrer la T -accrétivité de A dans $L^q(\Omega)$ pour $1 < q < \infty$. Or l'hypothèse (H_3) et la définition de A donnent :

$$(1.2) \quad \int_\Omega (v - \hat{v}) p(u - \hat{u}) \geq 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}_0 \quad \text{et} \quad \forall (u, v), (\hat{u}, \hat{v}) \in A.$$

Cette relation est encore vraie, naturellement, pour tout $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne, bornée, croissante et telle que $p(0) = 0$. En fait elle est vraie pour tout $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue croissante avec $p(0) = 0$ puisqu'une telle fonction est limite uniforme, sur tout compact, de fonctions lipschitziennes bornées croissantes nulles en zéro.

Prenons pour p , $p(r) = (r^+)^{q-1} \quad 1 < q < \infty$

alors d'après la proposition 0.1 on en déduit que A est

T -accrétif dans $L^q(\Omega) \quad 1 < q < \infty$.

Il reste à montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $R(I + \lambda A) = L^\infty(\Omega)$ ou, ce qui revient au même, qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$R(\alpha I + A) = L^\infty(\Omega)$. Nous allons, en fait, montrer cette égalité pour des $\alpha > \sup(0, c)$ où c est la constante, relative à $u_0 = 0$, intervenant dans l'hypothèse (H_4) .

Fixons $f \in L^\infty(\Omega)$, et utilisant l'hypothèse (H_4) , soit $R > 0$ défini par :

$$(1.3) \quad \|u\|_V \geq R \Rightarrow \frac{\varphi(u) + \langle \mathcal{A}u, u \rangle + c \|u\|_2^2}{\|u\|_V} > \|f\|_{V'}.$$

Notons B le convexe fermé de V :

$$B = \{u \in V / \|u\|_V \leq R\}$$

et I_B la fonction indicatrice de B , convexe s. c. i.

Utilisons les résultats suivants (cf. Brézis [10]) :

- 1) Si deux opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ maximaux monotones de V dans V' sont tels que $\text{Int } D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ alors $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ est maximal monotone.
- 2) Si $\mathcal{A}$ est un opérateur maximal monotone et si $\mathcal{A}^{-1}$ est borné alors $R(\mathcal{A}) = V'$.

Alors comme $D(\partial I_B) = B$, l'opérateur $\partial I_B + \partial \varphi + \mathcal{A} + \alpha \mathcal{I}$, où $\mathcal{I}$ est l'injection canonique de V dans V' , est maximal monotone de domaine inclus dans B , et donc est surjectif.

Il en résulte qu'il existe $u \in B$ tel que :

$$\partial I_B(u) + \partial \varphi(u) + \mathcal{A}u + \alpha u \ni f$$

ce qui implique, en particulier :

$$\varphi(u) + \langle \mathcal{A}u, u \rangle + \alpha \|u\|_2^2 \leq \int_\Omega f u \leq \|f\|_{V'} \|u\|_V$$

d'où, d'après le choix de α et de R dans (1.3)

$\|u\|_V < R$ et donc $\partial I_B(u) = 0$, ce qui donne :

$$(1.4) \quad \alpha u + \partial \varphi(u) + \mathcal{A}u \ni f$$

Il reste à montrer que $u \in L^\infty(\Omega)$.

D'après l'hypothèse (H_3) et (1.4) nous avons :

$$\int_\Omega (f - \alpha u) p(u) \geq 0 \quad \text{pour tout } p \in \mathcal{P}_0.$$

Nous en déduisons :

$$\int_\Omega j(u) \leq \int_\Omega j\left(\frac{f}{\alpha}\right) \quad \text{pour toute fonction } j \in \mathcal{C}'(\mathbb{R})$$

convexe telle que $j' \in \mathcal{P}_0$ et $j(0) = 0$.

En effet, j étant convexe, $j(r) \leq j(s) + j'(r)(r - s) \quad \forall r, s \in \mathbb{R}$.

Prenons j telle que :

$$j(r) = 0 \text{ si et seulement si } |r| \leq \frac{\|f\|_\infty}{\alpha}.$$

Nous en déduisons, j étant alors positive, $u \in L^\infty(\Omega)$ et

$$\|u\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{\alpha}.$$

*

REMARQUE 1.2 : En fait, l'hypothèse, plus faible, de coercivité suivante :

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \lim_{\|u\|_V \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u) + \langle Au, u \rangle + c \|u\|_2^2}{\|u\|_1} = +\infty$$

est suffisante pour obtenir la m - T -accrétivité de A dans $L^\infty(\Omega)$ (cf. [3]).

Pour tout $\epsilon > 0$ nous introduisons l'opérateur B_ϵ de $L^\infty(\Omega)$ dit de pénalisation :

$$B_\epsilon u = \beta_\epsilon (u - Mu) \quad \forall u \in L^\infty(\Omega)$$

où β_ϵ est l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\beta_\epsilon(r) = \frac{1}{\epsilon} r^+.$$

LEMME 1.3 :

B_ϵ est un opérateur lipschitzien et T -accrétif de $L^\infty(\Omega)$.

preuve : β_ϵ étant lipschitzienne de rapport $\frac{1}{\epsilon}$ et M étant une contraction de $L^\infty(\Omega)$ nous avons :

$$\|B_\epsilon u - B_\epsilon \hat{u}\|_\infty \leq \frac{2}{\epsilon} \|u - \hat{u}\|_\infty \quad \forall u, \hat{u} \in L^\infty(\Omega).$$

Montrons la T -accrétivité de B_ϵ .

Etant donnés $u, \hat{u} \in L^\infty(\Omega)$ et $\lambda > 0$ posons :

$$k_0 = \|(u - \hat{u})^+\|_\infty$$

$$k_1 = \|(u - \hat{u} + \lambda (B_\epsilon u - B_\epsilon \hat{u}))^+\|_\infty$$

$$v = u - \hat{u}.$$

Nous avons :

(1.5)

$$B_\epsilon u - B_\epsilon \hat{u} \leq \frac{1}{\lambda} (k_1 - v)$$

$$\text{De } Mu - M\hat{u} \leq \|(Mu - M\hat{u})^+\|_\infty \leq \|(u - \hat{u})^+\|_\infty = k_0,$$

nous obtenons :

$$\hat{u} - M\hat{u} \leq u - Mu + k_0 - v$$

β_ϵ étant lipschitzienne de rapport $\frac{1}{\epsilon}$ et $k_0 - v \geq 0$, nous avons

$$\beta_\epsilon (\hat{u} - M\hat{u}) \leq \beta_\epsilon (u - Mu) + \frac{1}{\epsilon} (k_0 - v) \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$(1.6) \quad B_\epsilon (\hat{u}) \leq B_\epsilon (u) + \frac{1}{\epsilon} (k_0 - v).$$

De (1.5) et (1.6) nous déduisons :

$$\frac{1}{\epsilon} (k_0 - v) + \frac{1}{\lambda} (k_1 - v) \geq 0$$

et compte tenu de la définition de k_0 , pour tout $k < k_0$ nous avons encore :

$$\frac{1}{\epsilon} (k_0 - k) + \frac{1}{\lambda} (k_1 - k) \geq 0$$

faisons tendre k vers k_0 , nous obtenons $k_1 \geq k_0$.

*

Pour tout $\epsilon > 0$, nous pouvons maintenant définir l'opérateur C_ϵ de $L^\infty(\Omega)$:

$$C_\epsilon = A + B_\epsilon$$

qui, compte tenu des lemmes 1.2 et 1.3 et du corollaire de la proposition (0.2), est m-T-accrétif.

Notons pour tout $\lambda > 0$ et tout $\epsilon > 0$:

$$J_\lambda^\epsilon = (I + \lambda C_\epsilon)^{-1}.$$

Rappelons qu'alors J_λ^ϵ est une T-contraction, donc une contraction croissante, partout définie sur $L^\infty(\Omega)$.

LEMME 1.4 : $\lambda > 0$ étant donné, pour toute famille $\{f_\epsilon, \epsilon > 0\} \subset L^\infty(\Omega)$

telle que $f = L_*^\infty \lim_{\epsilon \searrow 0} f_\epsilon$:

$$i) \epsilon < \eta \Rightarrow J_\lambda^\epsilon f_\epsilon \leq J_\lambda^\eta f_\eta;$$

ii) $\{J_\lambda^\epsilon f_\epsilon, \epsilon > 0\}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$ lorsque $\epsilon \searrow 0$, plus précisément :

$$- \|f^-\|_\infty \leq J_\lambda^\epsilon f_\epsilon$$

$$- \|f^-\|_\infty \leq J_\lambda^\epsilon f \leq J_\lambda^A f \leq \|f^+\|_\infty.$$

Précisons la notation $f = L_{*}^{\infty} \lim_{\epsilon \searrow 0} f_{\epsilon}$, elle signifie :

1) $f \in L^{\infty}(\Omega)$

2) $\epsilon < \eta \Rightarrow f_{\epsilon} \leq f_{\eta}$

3) pour toute suite $\{\epsilon_n\}$ tendant en décroissant vers 0, $f_{\epsilon_n} \searrow f$ p.p.
c'est-à-dire $f = L_{*}^{\infty} \lim_{n \nearrow} f_{\epsilon_n}$.

preuve du lemme 1.4 :

i) Soit $\epsilon < \eta$. Notons $u_{\eta} = J_{\lambda}^{\eta} f_{\eta}$ ce qui peut s'écrire :

$$u_{\eta} + \lambda(A u_{\eta} + B_{\epsilon} u_{\eta}) \ni f_{\eta} + \lambda(B_{\epsilon} u_{\eta} - B_{\eta} u_{\eta})$$

c'est-à-dire :

$$u_{\eta} = J_{\lambda}^{\epsilon} (f_{\eta} + \lambda(B_{\epsilon} u_{\eta} - B_{\eta} u_{\eta}))$$

or $f_{\eta} \geq f_{\epsilon}$ et $B_{\epsilon} u_{\eta} \geq B_{\eta} u_{\eta}$

d'où $f_{\eta} + \lambda(B_{\epsilon} u_{\eta} - B_{\eta} u_{\eta}) \geq f_{\epsilon}$

J_{λ}^{ϵ} étant croissante, cela entraîne $u_{\eta} \geq J_{\lambda}^{\epsilon} f_{\epsilon}$.

ii) la croissance de J_{λ}^{ϵ} et $f_{\epsilon} \geq f$ entraînent $J_{\lambda}^{\epsilon} f_{\epsilon} \geq J_{\lambda}^{\epsilon} f$.

D'autre part :

$$u_{\epsilon} + \lambda C_{\epsilon} = u_{\epsilon} + \lambda A u_{\epsilon} + \lambda B_{\epsilon} u_{\epsilon} \ni f \text{ donne}$$

$$J_{\lambda}^{\epsilon} f = J_{\lambda}^A (f - \lambda B_{\epsilon} u_{\epsilon})$$

or $f - \lambda B_{\epsilon} u_{\epsilon} \leq f$ d'où $J_{\lambda}^{\epsilon} f \leq J_{\lambda}^A f$.

Enfin $J_{\lambda}^A 0 = \varphi(0) = 0$ et $M0 \geq 0 \Rightarrow J_{\lambda}^A 0 = J_{\lambda}^{\epsilon} 0 = 0$, d'où

$$\|(J_{\lambda}^{\epsilon} f)^+\|_{\infty} \leq \|f^+\|_{\infty}$$

$$\|(J_{\lambda}^{\epsilon} f)^-\|_{\infty} \leq \|f^-\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow -\|f^-\|_{\infty} \leq J_{\lambda}^{\epsilon} f \leq \|f^+\|_{\infty}$$

de même pour $J_{\lambda}^A f$

II. L'OPERATEUR C :

Introduisons le sous-ensemble suivant de $L^\infty(\Omega)$,

$$D = \{u \in L^\infty(\Omega) / u \leq Mu \text{ et il existe } w \in D(\varphi) \text{ tel que } w \leq Mu\}.$$

Pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$ et tout $\lambda > 0$, notons $I(f, \lambda)$ l'inéquation quasi-variationnelle (IQV) stationnaire suivante :

$$I(f, \lambda) \begin{cases} u \in D \\ \varphi(v) + \langle \frac{1}{\lambda} u, v - u \rangle \geq \varphi(u) + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} (f - u)(v - u), \quad \forall v \in V \quad v \leq Mu. \end{cases}$$

Pour tout $\lambda > 0$ notons :

$$D_\lambda = \{f \in L^\infty(\Omega) / \text{il existe une solution de } I(f, \lambda)\}.$$

THEOREME 1.1 :

Soient $\lambda > 0$ et $f \in D_\lambda$.

1) $u = L_*^\infty \lim_{\epsilon \searrow 0} J_\lambda^\epsilon f$ est la solution maximum de $I(f, \lambda)$.

Notons J_λ l'application définie sur D_λ par : $f \in D_\lambda \mapsto J_\lambda f$ solution maximum de $I(f, \lambda)$.

2) i) J_λ est une T-contraction de D_λ dans $L^\infty(\Omega)$

ii) pour tout $\mu > 0$:

$$(1.7) \quad \begin{cases} \frac{\mu}{\lambda} f + \frac{\lambda - \mu}{\lambda} J_\lambda f \in D_\mu \quad \text{et,} \\ J_\lambda f = J_\mu \left(\frac{\mu}{\lambda} f + \frac{\lambda - \mu}{\lambda} J_\lambda f \right). \end{cases}$$

Remarquons que l'existence de la $L_*^\infty \lim_{\epsilon \searrow 0} J_\lambda^\epsilon f$ est donnée par le lemme 1.4 ;

Nous utiliserons, pour la preuve de ce théorème, les deux lemmes suivants :

LEMME 1.5 : Soient $\lambda > 0$ et $f \in L^\infty(\Omega)$.

On se donne une suite $\{f_\epsilon, \epsilon > 0\} \subset L^\infty(\Omega)$ telle que $f = L_*^\infty \lim_{\epsilon \searrow 0} f_\epsilon$.

On note $u = L_*^\infty \lim_{\epsilon \searrow 0} J_\lambda^\epsilon f_\epsilon$.

Supposons qu'il existe $w \in D(\varphi)$ tel que $w \leq Mu$ alors u est solution de $I(f, \lambda)$.

LEMME 1.6 : Soit $f \in D_\lambda$ et soit $\bar{u}$ une solution de $I(f, \lambda)$.

Alors pour toute suite $\{f_\epsilon, \epsilon > 0\} \subset L^\infty(\Omega)$ telle que $f = L^\infty_* \lim_{\epsilon \searrow 0} f_\epsilon$

i) $\bar{u} \leq J_\lambda^\epsilon f_\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$

ii) $L^\infty_* \lim_{\epsilon \searrow 0} J_\lambda^\epsilon f_\epsilon$ est la solution maximum de $I(f, \lambda)$.

Effectuons quelques remarques avant de démontrer ces résultats.

REMARQUE 1.3 : Les lemmes 1.5 et 1.6 donnent une condition nécessaire et suffisante d'existence de la solution maximum, qui a l'inconvénient de ne pas porter directement sur f mais sur $\{J_\lambda^\epsilon f, \epsilon > 0\}$.

REMARQUE 1.4 : $u = L^\infty_* \lim_{\epsilon \searrow 0} J_\lambda^\epsilon f$ est solution (maximum) de $I(f, \lambda)$ si et seulement si $u \in D$.

REMARQUE 1.5 : D'après les lemmes 1.4 et 1.5 et $\varphi(0) = 0$, nous avons :

$$L^\infty(\Omega)^+ \subset D_\lambda \quad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

Plus généralement si

$$F = \{f \in L^\infty(\Omega) / \exists w \in D(\varphi) \quad \text{et} \quad w \leq M(-\|f^-\|_\infty)\}, \text{ alors :}$$

$$L^\infty(\Omega)^+ \subset F \subset D_\lambda \quad \text{pour tout } \lambda > 0$$

ce qui, entre autre chose, montre que D_λ n'est jamais vide. Remarquons que l'existence de la solution maximum pour tout $\lambda > 0$ et tout $f \in L^\infty(\Omega)^+$ a été montrée avec une hypothèse de coercivité plus faible [3].

REMARQUE 1.6 : Soit $D_0 = \{u \in D(A) / u \leq Mu\}$.

L'inclusion $D(A) \subset D(\varphi)$ montre que $D_0 \subset D$.

Pour tout $(f, \lambda) \in L^\infty(\Omega) \times]0, +\infty[$ tel que, il existe $u_0 \in D_0$ et $v_0 \in Au_0$ avec $f \geq u_0 + \lambda v_0$, alors $f \in D_\lambda$.

En effet, pour tout $\epsilon > 0$, $J_\lambda^\epsilon f \geq J_\lambda^\epsilon (u_0 + \lambda v_0) = J_\lambda^A (u_0 + \lambda v_0) = u_0$, car $u_0 \leq Mu_0$ et donc $C_\epsilon u_0 = Au_0$, par conséquent, $u = L^\infty_* \lim_{\epsilon \searrow 0} J_\lambda^\epsilon f \geq u_0$,

d'où $w = u_0$ satisfait à la condition du lemme 1.5.

Notons que ce résultat peut être obtenu par une toute autre méthode. Fixons-nous $u_0 \in D_0$ et $v_0 \in Au_0$, et introduisons les nouvelles applications $\tilde{M}$, $\tilde{A}$ et $\tilde{\varphi}$ définies par :

$$\begin{aligned}\tilde{M}(\tilde{v}) &= M(\tilde{v} + u_0) - u_0 & \forall \tilde{v} \in L^\infty(\Omega) \\ \tilde{A}(\tilde{v}) &= A(\tilde{v} + u_0) - Au_0 & \forall \tilde{v} \in V \\ \tilde{\varphi}(\tilde{v}) &= \varphi(\tilde{v} + u_0) - \varphi(u_0) + \langle w_0, \tilde{v} \rangle & \forall \tilde{v} \in V, \\ & \text{où } w_0 = v_0 - \mathcal{J}_\epsilon^* u_0 \in \partial\varphi(u_0).\end{aligned}$$

On montre sans difficultés que $\tilde{M}$, $\tilde{A}$, $\tilde{\varphi}$ vérifient les mêmes hypothèses que M , A et φ et par conséquent $\tilde{A} = (\tilde{A} + \partial\tilde{\varphi}) \cap L^\infty \times L^\infty$ est m - T -accrétif dans $L^\infty(\Omega)$ et nous avons les identités suivantes :

$$\begin{aligned}\partial\tilde{\varphi}(\tilde{v}) &= \partial\varphi(\tilde{v} + u_0) - w_0 \\ \tilde{A}\tilde{v} &= A(\tilde{v} + u_0) - v_0.\end{aligned}$$

On a le résultat suivant :

$\tilde{u}$ est solution (resp. solution maximum) de $\tilde{I}(\tilde{f}, \lambda)$ si et seulement si $u = \tilde{u} + u_0$ est solution (resp. solution maximum) de $I(\tilde{f} + (u_0 + \lambda v_0), \lambda)$.

En d'autres termes :

$$f \in D_\lambda \text{ si et seulement si } f - (u_0 + \lambda v_0) \in \tilde{D}_\lambda$$

$$\text{de plus, } J_\lambda f = \tilde{J}_\lambda (f - (u_0 + \lambda v_0)) + u_0.$$

En particulier si $f \geq u_0 + \lambda v_0$ c'est-à-dire $\tilde{f} \geq 0$ et d'après la remarque 1.5 $\tilde{f} \in \tilde{D}_\lambda$ et nous retrouvons le fait que $f \in D_\lambda$.

démonstration du théorème : Supposons les lemmes 1.5 et 1.6 démontrés.

Donnons-nous $\lambda > 0$ et $f \in D_\lambda$. Le lemme 1.6 montre que $L^\infty \lim_{\epsilon \searrow 0} J_\lambda^\epsilon f$ est la solution maximum de $I(f, \lambda)$, nous la notons $J_\lambda f$.

J_λ apparaît donc comme une application de D_λ dans $L^\infty(\Omega)$.

Pour tout $\epsilon > 0$ J_λ^ϵ est une T -contraction partout définie, donc pour tout $f, \hat{f}$ de D_λ nous avons :

$$\|(J_\lambda^\epsilon f - J_\lambda^\epsilon \hat{f})^+\|_\infty \leq \|(f - \hat{f})^+\|_\infty.$$

En passant à la limite, nous obtenons que J_λ est une T -contraction sur D_λ .

Notons $u = J_\lambda f$ et $g = \frac{\mu}{\lambda} f + \frac{\lambda - \mu}{\lambda} J_\lambda f$ où $\mu > 0$ est donné.

Nous avons alors la relation :

$$\frac{g - u}{\mu} = \frac{f - u}{\lambda}$$

donc $u = J_\lambda f$ vérifie :

$$\begin{cases} u \in D \\ \varphi(v) + \langle \frac{1}{\mu} u, v - u \rangle \geq \varphi(u) + \int_\Omega \frac{g - u}{\mu} (v - u) \quad \forall v \in V \quad v \leq Mu \end{cases}$$

c'est-à-dire que u est solution de $I(g, \mu)$ donc $g \in D_\mu$.

De plus, nous pouvons remarquer que $u = J_\lambda f \leq J_\mu g$, cependant nous allons démontrer l'égalité $J_\lambda f = J_\mu g$ sans nous servir de cette inégalité.

Si $\mu \leq \lambda$ la m -accrétivité de C_ϵ nous permet d'écrire

$$J_\lambda^\epsilon f = J_\mu^\epsilon \left(\frac{\mu}{\lambda} f + \frac{\lambda - \mu}{\lambda} J_\lambda^\epsilon f \right) \quad (\text{cf. (0.4)}).$$

D'après le lemme 1.6 :

$$g_\epsilon = \frac{\mu}{\lambda} f + \frac{\lambda - \mu}{\lambda} J_\lambda^\epsilon f \searrow g = \frac{\mu}{\lambda} f + \frac{\lambda - \mu}{\lambda} J_\lambda f \text{ lorsque } \epsilon \searrow 0 \text{ et comme}$$

$g \in D_\mu$, toujours d'après le même lemme :

$$J_\mu^\epsilon g_\epsilon \searrow J_\mu g \quad \text{lorsque } \epsilon \searrow 0,$$

$$\text{or } J_\mu^\epsilon g_\epsilon = J_\lambda^\epsilon f \searrow J_\lambda f,$$

$$\text{d'où } J_\mu g = J_\lambda f.$$

Si $\mu > \lambda$, d'après ce qui précède, $J_\mu g = J_\lambda h$ avec :

$$h = \frac{\lambda}{\mu} g + \frac{\mu - \lambda}{\mu} J_\mu g \in D_\lambda.$$

D'autre part, $g = \frac{\mu}{\lambda} f + \frac{\lambda - \mu}{\lambda} J_\lambda f \Leftrightarrow f = \frac{\lambda}{\mu} g + \frac{\mu - \lambda}{\mu} J_\lambda f$, d'où, puisque J_λ est une contraction sur D_λ :

$$\|J_\mu g - J_\lambda f\|_\infty = \|J_\lambda h - J_\lambda f\|_\infty \leq \|h - f\|_\infty = \frac{\mu - \lambda}{\mu} \|J_\mu g - J_\lambda f\|_\infty$$

comme $0 < \frac{\mu - \lambda}{\mu} < 1$ nous avons nécessairement $J_\mu g = J_\lambda f$.

*

démonstration du lemme 1.5 :

Soient : $\lambda > 0$, $f \in L^\infty(\Omega)$ $\{f_\epsilon\}_{\epsilon > 0} \subset L^\infty(\Omega)$ $f = L_*^\infty \lim_{\epsilon \searrow 0} f_\epsilon$ et

$u = L_{*}^{\infty} \cdot \lim_{\epsilon \searrow 0} J_{\lambda}^{\epsilon} f_{\epsilon}$. Soit $w \in D(\varphi)$ tel que $w \leq Mu$.

Notons $u_{\epsilon} = J_{\lambda}^{\epsilon} f_{\epsilon}$, alors $(u_{\epsilon}, v_{\epsilon}) \in A$ avec $v_{\epsilon} = \frac{f_{\epsilon} - u_{\epsilon}}{\lambda} - B_{\epsilon} u_{\epsilon}$.

Appliquons la définition (1.1) de A , cela donne :

$$(1.8) \quad \varphi(w) + \langle \mathcal{A} u_{\epsilon}, w - u_{\epsilon} \rangle + \int_{\Omega} B_{\epsilon} u_{\epsilon} (w - u_{\epsilon}) \geq \varphi(u_{\epsilon}) + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} (f_{\epsilon} - u_{\epsilon}) (w - u_{\epsilon})$$

$$B_{\epsilon} u_{\epsilon} (w - u_{\epsilon}) = \beta_{\epsilon} (u_{\epsilon} - Mu_{\epsilon}) (w - Mu_{\epsilon}) + \beta_{\epsilon} (u_{\epsilon} - Mu_{\epsilon}) (Mu_{\epsilon} - u_{\epsilon}) \leq 0$$

car $w \leq Mu \leq Mu_{\epsilon}$, d'où :

$$\frac{\varphi(u_{\epsilon}) - \varphi(w) + \langle \mathcal{A} u_{\epsilon}, u_{\epsilon} - w \rangle + c \|u_{\epsilon} - w\|_2^2}{\|u_{\epsilon} - w\|_V} \leq \frac{1}{\lambda} \|f_{\epsilon}\|_{V'} + \left| c - \frac{1}{\lambda} \right| \|u_{\epsilon}\|_{V'} + |c| \|w\|_{V'}.$$

Le membre de droite est borné quand $\epsilon \searrow 0$, alors compte tenu de l'hypothèse de coercivité (H_4) et de la remarque 1.1, nous en déduisons que $\{u_{\epsilon}\}_{\epsilon > 0}$ est borné dans V .

Or $\{u_{\epsilon}\}$ converge fortement donc faiblement vers u dans $L^2(\Omega)$.

Alors toute sous-suite de $\{u_{\epsilon}\}$ convergeant faiblement dans V , converge faiblement vers u dans $L^2(\Omega)$. En raisonnant par l'absurde et compte tenu du théorème d'Eberlein-Shmulyan (cf. [24] p.141), $u_{\epsilon} \rightharpoonup u$ faiblement dans V .

Compte tenu de la monotonie de $\mathcal{A}$ et de $B_{\epsilon} u_{\epsilon} (u_{\epsilon} - w) \geq 0$, de (1.8) il vient :

$$\varphi(u_{\epsilon}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} (f_{\epsilon} - u_{\epsilon}) (u_{\epsilon} - w) + \varphi(w) + \langle \mathcal{A} w, w - u_{\epsilon} \rangle$$

et en passant à la limite :

$$\varphi(u) \leq \liminf \varphi(u_{\epsilon}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} (f - u) (u - w) + \varphi(w) + \langle \mathcal{A} w, w - u \rangle < +\infty$$

d'où $u \in D(\varphi)$.

Toujours de la monotonie de $\mathcal{A}$ et de $\varphi \geq 0$, de (1.8) il vient :

$$\int_{\Omega} B_{\epsilon} u_{\epsilon} (u_{\epsilon} - w) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} (f_{\epsilon} - u_{\epsilon}) (u_{\epsilon} - w) + \varphi(w) + \langle \mathcal{A} w, w - u_{\epsilon} \rangle$$

qui s'écrit encore :

$$\int_{\Omega} (u_{\epsilon} - Mu_{\epsilon})^+ (u_{\epsilon} - w) \leq \epsilon \left[\frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} (f_{\epsilon} - u_{\epsilon}) (u_{\epsilon} - w) + \varphi(w) + \langle \mathcal{A} w, w - u_{\epsilon} \rangle \right]$$

or $Mu = L_{*}^{\infty} \lim_{\epsilon \searrow 0} Mu_{\epsilon}$ par hypothèse sur M et

$$(u_{\epsilon} - Mu_{\epsilon})^+ \leq (u_1 - Mu)^+ \quad \text{donc} \quad (u_{\epsilon} - Mu_{\epsilon})^+ \xrightarrow{\epsilon \searrow 0} (u - Mu)^+ \text{ dans } L^2(\Omega).$$

D'autre part, le membre de droite tend vers 0, d'où à la limite :

$$\int_{\Omega} (u - Mu)^+ (u - w) \leq 0$$

or $w \leq Mu$ entraîne $(u - Mu)^+ (u - w) \geq 0$

d'où $(u - Mu)^+ (u - w) = 0$ p.p. ce qui nécessairement donne

$$u \leq Mu.$$

Réécrivons (1.8) pour des $v \in V$ tel que $v \leq Mu$.

Nous avons encore $B_{\epsilon} u_{\epsilon} (v - u_{\epsilon}) \leq 0$ et

$$\varphi(v) + \langle \mathcal{H} u_{\epsilon}, v - u_{\epsilon} \rangle \geq \varphi(u_{\epsilon}) + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} (f_{\epsilon} - u_{\epsilon}) (v - u_{\epsilon}).$$

On fait tendre ϵ vers 0.

Cela donne :

$$\varphi(v) + \lim_{\epsilon \searrow 0} \langle \mathcal{H} u_{\epsilon}, v - u_{\epsilon} \rangle \geq \varphi(u) + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} (f - u) (v - u)$$

faisons $v = u$, il vient :

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \langle \mathcal{H} u_{\epsilon}, u_{\epsilon} - u \rangle \leq 0$$

et par pseudo-monotonie de $\mathcal{H}$ (cf. lemme 1.1)

$\mathcal{H} u_{\epsilon} \rightharpoonup \mathcal{H} u$ faiblement dans V' et

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \langle \mathcal{H} u_{\epsilon}, u_{\epsilon} \rangle = \langle \mathcal{H} u, u \rangle$$

d'où, pour tout $v \in V$, $v \leq Mu$:

$$\varphi(v) + \langle \mathcal{H} u, v - u \rangle \geq \varphi(u) + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} (f - u) (v - u).$$

*

démonstration du lemme 1.6 :

Soient $f \in D_{\lambda}$, $\bar{u}$ une solution de $I(f, \lambda)$ et $\{f_{\epsilon}\}_{\epsilon > 0} \subset L^{\infty}(\Omega)$ telle que

$$f = L^{\infty}_* \lim_{\epsilon \searrow 0} f_{\epsilon}.$$

i) Montrons que $\bar{u} \leq J_{\lambda}^{\epsilon} f_{\epsilon} = u_{\epsilon}$: fixons-nous $\epsilon > 0$.

La m-T-accrétivité des opérateurs A et $C_{\epsilon, \alpha} = A + \beta_{\epsilon} (\cdot - \alpha)$ où $\alpha \in L^{\infty}(\Omega)$

nous permet de définir pour tout $\epsilon > 0$ et par récurrence sur n , une suite

$\{u_{\epsilon, n}, n \in \mathbb{N}\} \subset D(A)$ comme suit :

$$(1.9) \quad \begin{cases} u_{\epsilon, 0} + \lambda A u_{\epsilon, 0} \ni f_{\epsilon} \\ u_{\epsilon, n} + \lambda A u_{\epsilon, n} + \lambda \beta_{\epsilon} (u_{\epsilon, n} - M u_{\epsilon, n-1}) \ni f_{\epsilon} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Montrons que $\bar{u} \leq u_{\epsilon, n}$ par récurrence sur n ; pour tout $n \geq 0$

soit $v_n = \bar{u} - p(\bar{u} - u_{\epsilon, n})$ où $p \in \mathcal{P}_0$ avec
$$\begin{cases} p(r) > 0 & \text{si } r > 0 \\ p(r) = 0 & \text{si } r \leq 0 \end{cases}$$

$\bar{u}$ étant solution de $I(f, \lambda)$:

$v_n \leq \bar{u} \leq M\bar{u}$ et

$$(1.10) \quad \varphi(\bar{u} - p(\bar{u} - u_{\epsilon, n})) - \langle \bar{u}, p(\bar{u} - u_{\epsilon, n}) \rangle \geq \varphi(\bar{u}) - \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} (f - \bar{u}) p(\bar{u} - u_{\epsilon, n})$$

et par définition de $u_{\epsilon, n}$ nous avons :

$$(1.11) \quad \varphi(u_{\epsilon, n} + p(\bar{u} - u_{\epsilon, n})) + \langle u_{\epsilon, n}, p(\bar{u} - u_{\epsilon, n}) \rangle \\ \geq \varphi(u_{\epsilon, n}) + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} (f_{\epsilon} - u_{\epsilon, n}) p(\bar{u} - u_{\epsilon, n}) + \gamma_{\epsilon, n}$$

$$\text{où } \gamma_{\epsilon, n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} \beta_{\epsilon}(u_{\epsilon, n} - Mu_{\epsilon, n-1}) p(\bar{u} - u_{\epsilon, n}) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

or si nous supposons $\bar{u} \leq u_{\epsilon, n-1}$ pour $n \geq 1$ nous obtenons, par le choix

de p et compte tenu de $\bar{u} \leq Mu_{\epsilon, n-1}$, $\gamma_{\epsilon, n} = 0$ pour $n \geq 1$; alors en

additionnant (1.10) et (1.11) et compte tenu de l'hypothèse (H_3) nous obtenons :

$$\int_{\Omega} (f_{\epsilon} - f) p(\bar{u} - u_{\epsilon, n}) + \int_{\Omega} (\bar{u} - u_{\epsilon, n}) p(\bar{u} - u_{\epsilon, n}) \leq 0 \quad \text{pour } n \geq 0$$

et compte tenu de $(f_{\epsilon} - f) p(\bar{u} - u_{\epsilon, n}) \geq 0$ il vient :

$$\int_{\Omega} (\bar{u} - u_{\epsilon, n}) p(\bar{u} - u_{\epsilon, n}) \leq 0 \quad \text{et par le choix de } p \text{ cela donne :}$$

$\bar{u} \leq u_{\epsilon, n}$ pour tout $n \geq 0$.

Montrons, maintenant, que $u_{\epsilon} = \underline{L}_{*}^{\infty} \lim_{n \nearrow} u_{\epsilon, n}$

ce qui achèvera de montrer i).

Nous montrons par récurrence sur n que $\{u_{\epsilon, n}\}$ est décroissante.

Supposons $u_{\epsilon, n} \leq u_{\epsilon, n-1}$ pour $n \geq 1$, d'où $Mu_{\epsilon, n} \leq Mu_{\epsilon, n-1}$.

Soit $v_{\epsilon, n+1} \in Au_{\epsilon, n+1}$ tel que $f_{\epsilon} = u_{\epsilon, n+1} + \lambda v_{\epsilon, n+1} + \lambda \beta_{\epsilon}(u_{\epsilon, n+1} - Mu_{\epsilon, n})$

alors $g_{\epsilon} = u_{\epsilon, n+1} + \lambda v_{\epsilon, n+1} + \lambda \beta_{\epsilon}(u_{\epsilon, n+1} - Mu_{\epsilon, n-1}) \leq f_{\epsilon}$

or $f_{\epsilon} = u_{\epsilon, n} + \lambda v_{\epsilon, n} + \lambda \beta_{\epsilon}(u_{\epsilon, n} - Mu_{\epsilon, n-1})$

alors par T -accrétivité de $A + \beta_{\epsilon}(\cdot - Mu_{\epsilon, n-1})$ nous en déduisons

$$u_{\epsilon, n+1} \leq u_{\epsilon, n}.$$

Pour montrer $u_{\epsilon, 1} \leq u_{\epsilon, 0}$ nous faisons dans ce qui précède $n = 0$:

$$g_\epsilon = u_{\epsilon,1} + \lambda v_{\epsilon,1} \leq f_\epsilon = u_{\epsilon,1} + \lambda v_{\epsilon,1} + \lambda \beta_\epsilon (u_{\epsilon,1} - M u_{\epsilon,0})$$

$$\text{or } f_\epsilon = u_{\epsilon,0} + \lambda v_{\epsilon,0}$$

et par T-accrétivité de A : $u_{\epsilon,1} \leq u_{\epsilon,0}$.

La suite $\{u_{\epsilon,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ étant minorée par $\bar{u}$, elle tend en décroissant vers

$\bar{u}_\epsilon$ p.p. et donc $M u_{\epsilon,n} \searrow M \bar{u}_\epsilon$, d'où

$$v_{\epsilon,n} = \frac{f_\epsilon - u_{\epsilon,n}}{\lambda} - \beta_\epsilon (u_{\epsilon,n} - M u_{\epsilon,n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{f_\epsilon - \bar{u}_\epsilon}{\lambda} - \beta_\epsilon (\bar{u}_\epsilon - M \bar{u}_\epsilon) = \bar{v}_\epsilon \text{ p.p.}$$

comme $\bar{u} \leq u_{\epsilon,n} \leq u_{\epsilon,0}$

$$\text{et } \beta_\epsilon (u_{\epsilon,n} - M u_{\epsilon,n-1}) \leq \frac{1}{\epsilon} (u_{\epsilon,0} - M \bar{u})^+,$$

par le théorème de Lebesgue, la convergence est dans $L^2(\Omega)$.

D'où $(\bar{u}_\epsilon, \bar{v}_\epsilon) \in \bar{A}^{L^2} \cap L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$, où $\bar{A}^{L^2}$ est la fermeture de A dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Or A est monotone dans $L^2(\Omega)$ et m-accrétif dans $L^\infty(\Omega)$ (cf. lemme 1.2)

alors $\bar{A}^{L^2} \cap L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) = A$ (cf. prop. 1.5 [17]).

Il s'en suit que $\bar{u}_\epsilon = J_\lambda^\epsilon f_\epsilon$ c'est-à-dire $u_\epsilon = \bar{u}_\epsilon$.

$$\text{ii) Soit } u = L_*^\infty \lim_{\epsilon \searrow 0} u_\epsilon, \quad \text{d'après i) } \bar{u} \leq u$$

or $\bar{u} \in D(\varphi)$ et $\bar{u} \leq M \bar{u}$ donc $\bar{u} \leq M u$ alors par le lemme 1.5 u est solution de $I(f, \lambda)$ et comme d'après ce qui précède, u majore toute solution de $I(f, \lambda)$ u est solution maximum (en particulier, cette solution est indépendante de la suite $\{f_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$).

*

Nous pouvons maintenant définir l'opérateur C de $L^\infty(\Omega)$

$$C = \left\{ \left(J_\lambda f, \frac{f - J_\lambda f}{\lambda} \right) / \lambda > 0, f \in D_\lambda \right\}.$$

PROPOSITION 1.1 (cf. Crandall-Liggett [14]) :

C est un opérateur T-accrétif de $L^\infty(\Omega)$ tel que :

$$D(C) = R(J_\lambda) \text{ pour tout } \lambda > 0,$$

$$R(I + \lambda C) = D_\lambda \text{ et } (I + \lambda C)^{-1} = J_\lambda.$$

preuve : La relation (1.7) du théorème 1.1 montre que $D(C) = R(J_\lambda)$ pour tout $\lambda > 0$ et

$$(1.12) \quad (u, v) \in C \Leftrightarrow \forall \lambda > 0, \quad \exists f \in D_\lambda \text{ tel que } u = J_\lambda f \text{ et } v = \frac{f - J_\lambda f}{\lambda} \\ \Leftrightarrow u = J_\lambda (u + \lambda v) \text{ pour tout } \lambda > 0.$$

En effet, si $(u, v) \in C$ il existe $\mu > 0$, il existe $g \in D_\mu$ tel que $u = J_\mu g$ et $v = \frac{g - J_\mu g}{\mu}$, d'où, d'après (1.7) du théorème, pour tout $\lambda > 0$ $u = J_\mu g = J_\lambda f$ avec $f = \frac{\lambda}{\mu} g + \frac{\mu - \lambda}{\mu} u$, d'où $\frac{f - u}{\lambda} = \frac{g - u}{\mu} = v$.

D'autre part :

$u \in (I + \lambda C)^{-1} f \Leftrightarrow u + \lambda Cu \ni f \Leftrightarrow Cu \ni \frac{f - u}{\lambda} \Leftrightarrow u = J_\lambda f$
ce qui prouve que $(I + \lambda C)^{-1} = J_\lambda$ est une T-contraction définie sur $R(I + \lambda C) = D_\lambda$ donc C est T-accrétif.

*

III. EXEMPLES :

Nous prendrons dans ce qui suit, Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ et pour

M l'application de $L^\infty(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$ définie par :

$$(1.13) \quad \begin{cases} Mu = k + I(u) & k \in L^\infty(\Omega)^+ \\ I(u)(x) = \inf_{y \in \Omega_x^+} \text{ess } u(y) & \text{(1)} \quad \text{où } \Omega_x^+ = \{y \in \Omega / y \geq x\}. \end{cases}$$

PROPRIETES DE M : Si M est définie par (1.13) :

- 1) M vérifie (M_1) et : $u \leq \hat{u}$ p.p. $\Rightarrow I(u) \leq I(\hat{u})$ partout sur Ω ;
- 2) Si $u_n, u \in L^\infty(\Omega)$ et $u_n \rightarrow u$ p.p. alors $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I(u_n) \leq I(u)$ partout sur Ω
en particulier M vérifie (M_2) ;
- 3) $Mu \leq k + u$ p.p. pour tout $u \in L^\infty(\Omega)$;
- 4) M est concave ;
- 5) Si k est s.c.s. (semi continue supérieurement) Mu est s.c.s. $\forall u \in L^\infty(\Omega)$;
- 6) Si $\inf \text{ess } k > 0$, M vérifie la condition de Laetsch [19], c'est-à-dire
pour tout $u \in L^\infty(\Omega)$, pour tout $\alpha \in [0, 1[$ il existe $\beta \in]\alpha, 1[$ tel que
 $M(\alpha u) \geq \beta Mu$.

preuve : 1) Soient $u, \hat{u} \in L^\infty(\Omega)$ tels que $u \leq \hat{u}$ p.p. Soit $x \in \Omega$, alors
 $I(u)(x) \leq u(y) \leq \hat{u}(y)$ pour presque tout $y \in \Omega_x^+$
d'où $I(u)(x) \leq I(\hat{u})(x)$.

D'autre part, soient $u, \hat{u} \in L^\infty(\Omega)$

$u(y) \leq \hat{u}(y) + \|(u - \hat{u})^+\|_\infty$ pour presque tout $y \in \Omega$

d'où $I(u)(x) \leq \hat{u}(y) + \|(u - \hat{u})^+\|_\infty$ pour presque tout $y \in \Omega_x^+$.

On en déduit $I(u)(x) \leq I(\hat{u})(x) + \|(u - \hat{u})^+\|_\infty$

(1) Si Ω' est un sous-ensemble mesurable de Ω de mesure non nulle

$$m = \inf_{y \in \Omega'} \text{ess } u(y) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq u(y) \text{ p.p. } y \in \Omega' \\ \text{et} \\ \lambda \leq u(y) \text{ p.p. } y \in \Omega' \Rightarrow \lambda \leq m. \end{cases}$$

Si $u \in L^\infty(\Omega)$, m existe dans $\mathbb{R}$ et $|m| \leq \|u\|_\infty$.

$$\text{et } \| (Mu - M\hat{u})^+ \|_\infty = \| (I(u) - I(\hat{u}))^+ \|_\infty \leq \| (u - \hat{u})^+ \|_\infty.$$

Par hypothèse $M0 = k \geq 0$.

2) Soit $u_n, u \in L^\infty(\Omega)$ tels que $u_n \rightarrow u$ p.p. ; soit $x \in \Omega$:

$$I(u_n)(x) \leq u_n(y) \text{ p.p. } y \in \Omega_x^+, \quad \forall n$$

à la limite :

$$\overline{\lim}_n I(u_n)(x) \leq u(y) \text{ p.p. } y \in \Omega_x^+ \Rightarrow \overline{\lim}_n I(u_n)(x) \leq I(u)(x).$$

Si $u_n \searrow u$ p.p. alors d'après 1) $I(u)(x) \leq I(u_n)(x) \quad \forall x \in \Omega$

et d'après l'inégalité précédente $\lim I(u_n) = I(u)$ partout sur Ω .

On en déduit $Mu_n \searrow Mu$ p.p.

3) Soit $u \in L^\infty(\Omega)$ et soit x un point de Lebesgue de u .

$$I(u)(x) \leq u(x + \xi) \text{ pour presque tout } \xi \in B_\epsilon^+$$

où $B_\epsilon^+ = \{ \xi \in \mathbb{R}^N / \xi \geq 0 \text{ et } |\xi| < \epsilon \}$ pour ϵ assez petit tel que $B_\epsilon^+ + x \subset \Omega$.

$$\text{Alors } I(u)(x) \leq \frac{1}{|B_\epsilon^+|} \int_{B_\epsilon^+} u(x + \xi)$$

et d'après le théorème de différentiation de Lebesgue :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|B_\epsilon^+|} \int_{B_\epsilon^+} u(x + \xi) = u(x)$$

c'est-à-dire $I(u)(x) \leq u(x)$.

Or l'ensemble des points de Lebesgue de u est de complémentaire négligeable (cf. Dunford-Schwartz [15] p.218)

donc $I(u) \leq u$ p.p.

$$\begin{aligned} 4) \text{ La relation } \inf_{y \in \Omega'} \text{ess} (\lambda u(y) + \mu \hat{u}(y)) &\geq \lambda \inf_{y \in \Omega'} \text{ess} u(y) \\ &+ \mu \inf_{y \in \Omega'} \text{ess} u(y) \end{aligned}$$

pour tout $\mu, \lambda \in \mathbb{R}^+$ et tout $u, \hat{u} \in L^\infty(\Omega)$ entraîne la concavité de M .

5) Supposons k s.c.s. et soit $u \in L^\infty(\Omega)$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\{x_n\} \subset \Omega$ tels que :

$$x_n \rightarrow x \text{ dans } \Omega \text{ et } \lambda \leq Mu(x_n).$$

Fixons $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$ où $\epsilon_i > 0$, et $x + \epsilon \in \Omega$.

Pour n suffisamment grand : $x_n \leq x + \epsilon$, d'où

$$\lambda \leq k(x_n) + I(u)(x_n) \leq k(x_n) + I(u)(x + \epsilon).$$

Faisons tendre n vers l'infini, k étant s. c. s. il vient :

$$\lambda \leq k(x) + I(u)(x + \epsilon) \leq k(x) + u(y) \text{ pour presque tout } y \in \Omega_{x+\epsilon}^+.$$

Faisons tendre ϵ vers 0 :

$$\lambda \leq k(x) + u(y) \text{ p.p. } y > x \text{ d'où } \lambda \leq k(x) + I(u)(x).$$

6) Supposons que $m = \inf \text{ess } k > 0$.

Soient $u \in L^\infty(\Omega)$ et $\alpha \in [0, 1[$.

$$\text{Soit } \beta \in]\alpha, 1[\text{ tel que } \alpha < \beta < \frac{m + \alpha \|u\|_\infty}{m + \|u\|_\infty},$$

pour tout $x \in \Omega$ tel que $k(x) \geq m > 0$:

$$\frac{m + \alpha \|u\|_\infty}{m + \|u\|_\infty} \leq \frac{k(x) + \alpha \|u\|_\infty}{k(x) + \|u\|_\infty} \leq \frac{k(x) + \alpha I(u)(x)}{k(x) + I(u)(x)} \text{ si } I(u)(x) > -k(x)$$

$$\text{donc } \beta (k(x) + I(u)(x)) \leq k(x) + \alpha I(u)(x).$$

Si $k(x) + I(u)(x) \leq 0$ alors :

$$\beta (k(x) + I(u)(x)) \leq \alpha (k(x) + I(u)(x)) \leq k(x) + \alpha I(u)(x)$$

donc on a $\beta Mu \leq M(\alpha u)$.

*

EXEMPLE 1 : (cf. Lions [20])

$V = W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ $1 < p < \infty$ muni de la norme $\|\cdot\|_V$ définie par

$$\|u\|_V = \|u\|_{W_0^{1,p}} + \|u\|_2 \quad \text{où} \quad \|u\|_{W_0^{1,p}} = \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p}$$

$$V' = W^{-1,p'}(\Omega) + L^2(\Omega) \quad \text{où} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

$$\mathcal{A} = -\Delta_p = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

$$\varphi = 0.$$

Remarquons que pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ de mesure finie, et d'après les théorèmes d'injections de Sobolev si $p \geq \frac{2N}{2+N}$ alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ et donc $V = W_0^{1,p}(\Omega)$.

Il est classique que V vérifie les hypothèses (V_1) et (V_2) .

Montrons que $\mathcal{A}$ vérifie les hypothèses $(H_1)(H_3)(H_4)$, plus précisément :

LEMME 1.7 :

1) $\mathcal{A}$ est continue, monotone partout définie sur V à valeurs dans V' ;

2) $\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}\hat{u}, p(u - \hat{u}) \rangle \geq 0 \quad \forall u, \hat{u} \in V \quad \forall p \in \mathcal{P}_0$;

3) $\|\mathcal{A}u\|_{V'} \leq \|u\|_V^{p-1}$;

4) $\forall c > 0, \quad \exists \gamma > 0$ tel que :

$$\langle \mathcal{A}u, u \rangle + c \|u\|_2^2 + c \geq \gamma \|u\|_V^p$$

si $p \geq \frac{2N}{2+N}$ cela est encore vrai avec $c = 0$.

preuve : Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ $\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p'}(\Omega)$ donc $\mathcal{A}$ applique V

dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ et $\mathcal{A}$ est continue de V dans V' .

Soient $u, \hat{u} \in V$ et $p \in \mathcal{P}_0$

$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}\hat{u}, p(u - \hat{u}) \rangle_{V',V} = \langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}\hat{u}, p(u - \hat{u}) \rangle_{W^{-1,p'}, W_0^{1,p}}$$

$$= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} \right] \frac{\partial p(u - \hat{u})}{\partial x_i}$$

$$\begin{aligned} & \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} \right] \frac{\partial p(u - \hat{u})}{\partial x_i} \\ &= p'(u - \hat{u}) \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} \right] \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

alors $\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}\hat{u}, p(u - \hat{u}) \rangle \geq 0$ résulte de $p' \geq 0$ et de
 $t \mapsto |t|^{p-2} t$ croissante sur $\mathbb{R}$. La monotonie en résulte.
 Montrons l'hypothèse (H_4) :

pour tout $v \in V$,

$$\langle \mathcal{A}u, v \rangle \leq \|\mathcal{A}u\|_{W^{-1}, p'} \|v\|_{W^1, p} \leq \|\mathcal{A}u\|_{W^{-1}, p'} \|v\|_V$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\mathcal{A}u\|_{V'} &\leq \|\mathcal{A}u\|_{W^{-1}, p'} \leq \left(\sum_{i=1}^N \left\| \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{p'}^{p'} \right)^{1/p'} \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p'} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\mathcal{A}u\|_{V'} \leq \|u\|_{W^1, p}^{p-1} \leq \|u\|_V^{p-1}.$$

Compte tenu de la remarque 1.1 avec $\alpha = p - 1$ si $p \geq 2$ et
 $\alpha = 1$ si $1 < p < 2$, l'hypothèse (H_4) sera vérifiée si 4) est vraie.

Si $p \geq \frac{2N}{2+N}$, alors $\|\cdot\|_V$ est équivalente à $\|\cdot\|_{W^1, p}$ et donc
 il existe $\gamma > 0$ tel que :

$$\langle \mathcal{A}u, u \rangle = \sum_{i=1}^N \int \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p = \|u\|_{W^1, p}^p \geq \gamma \|u\|_V^p$$

pour tout $u \in V = W^1, p(\Omega)$

et donc pour tout $c \geq 0$ $\langle \mathcal{A}u, u \rangle + c \|u\|_2^2 + c \geq \gamma \|u\|_V^p$.

Si $1 < p < \frac{2N}{2+N}$, donc $p < 2$, soit $c > 0$,

$$\frac{x^p + c(y^2 + 1)}{(x + y)^p} \geq \frac{1}{2^p} \inf_{y > 0} \left(1, \min_{y > 0} \frac{c(y^2 + 1)}{y^p} \right) > 0 \quad \forall x > 0 \text{ et } \forall y > 0$$

donc il existe $\gamma > 0$ tel que :

$$\|u\|_{W^1, p}^p + c \|u\|_2^2 + c \geq \gamma \|u\|_V^p$$

4) est donc vérifié.

$A = \mathcal{H} \cap L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} D(A) = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) / \Delta_p u \text{ (au sens des distributions)} \in L^\infty(\Omega)\} \\ Au = -\Delta_p u. \end{array} \right.$$

Si $p = 2$, d'après un résultat d'Agmon-Douglis-Nirenberg [1],

si $u \in D(A)$: $u \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} W^{1,p}(\Omega)$, en particulier $u \in C^{2-\epsilon}(\bar{\Omega})$

et $\Delta_p = \Delta u$ est une fonction définie p. p. $\in L^\infty(\Omega)$.

EXEMPLE 2 :

$V = H^1(\Omega)$, Ω à frontière lipschitzienne.

$\mathcal{A}$ est l'application linéaire continue de V dans V' définie par :

$$\langle \mathcal{A}u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \text{pour tout } u, v \in V.$$

φ l'application linéaire s. c. i. sur V à valeurs dans $[0, +\infty]$ définie par :

$$\varphi(u) = \int_{\Gamma} j(u)$$

où $j : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ convexe s. c. i. $j(0) = 0$;

$\mathcal{A}$ étant linéaire, $\langle \mathcal{A}u, u \rangle \geq 0$ donne la monotonie de $\mathcal{A}$.

φ est s. c. i. par application du lemme de Fatou (cf. appendice [11]).

Nous avons les hypothèses (H_3) et (H_4) plus précisément :

LEMME 1.8 :

- 1) $\langle \mathcal{A}u, p(u) \rangle \geq 0 \quad \forall u \in V \quad \forall p \in \mathcal{P}_0$
 $\varphi(u) + \varphi(\hat{u}) \geq \varphi(u - p(u - \hat{u})) + \varphi(\hat{u} + p(u - \hat{u})) \quad \forall u, \hat{u} \in V \quad \forall p \in \mathcal{P}_0$;
- 2) $\varphi(u) + \langle \mathcal{A}u, u \rangle + \|u\|_2^2 \geq \|u\|_V^2$
 $\|\mathcal{A}u\|_{V'} \leq \|u\|_V$.

preuve : 1) Si $u \in V$ et $p \in \mathcal{P}_0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial p(u)}{\partial x_i} = p'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \geq 0 \quad \text{d'où} \quad \langle \mathcal{A}u, p(u) \rangle \geq 0.$$

Soient $u, \hat{u} \in V$ et $p \in \mathcal{P}_0$

pour presque tout $x \in \Gamma$, $\exists \alpha(x)$ tel que :

$$p(u(x) - \hat{u}(x)) = p'(\alpha(x)) (u(x) - \hat{u}(x)) ;$$

j étant convexe et $0 \leq p' \leq 1$ nous avons :

$$j[u(x) - p(u(x) - \hat{u}(x))] \leq (1 - p'(\alpha(x))) j(u(x)) + p'(\alpha(x)) j(\hat{u}(x)) ,$$

$$j[\hat{u}(x) + p(u(x) - \hat{u}(x))] \leq (1 - p'(\alpha(x))) j(\hat{u}(x)) + p'(\alpha(x)) j(u(x)) ,$$

en additionnant, il vient :

$$j[u(x) - p(u(x) - \hat{u}(x))] + j[\hat{u}(x) + p(u(x) - \hat{u}(x))] \leq j(u(x)) + j(\hat{u}(x))$$

et en intégrant sur Γ nous obtenons :

$$\varphi(u - p(u - \hat{u})) + \varphi(\hat{u} + p(u - \hat{u})) \leq \varphi(u) + \varphi \hat{u}.$$

2) φ étant positive et par définition de $\mathcal{A}$:

$$\varphi(u) + \langle \mathcal{A}u, u \rangle + \|u\|_2^2 \geq \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \|u\|_2^2 = \|u\|_V^2.$$

Nous avons :

$$\|\mathcal{A}u\|_{V'} \leq \left(\sum \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2 \right)^{1/2} \leq \|u\|_V.$$

*

$$(1.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \partial\varphi + \mathcal{A} \cap L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \text{ est défini par (cf. Brézis [12]) :} \\ D(A) = \left\{ u \in \bigcap_{1 \leq p < +\infty} W^{2,p}(\Omega) / \Delta u \in L^\infty(\Omega), -\frac{\partial u}{\partial n} \in \partial j(u) \right\} \\ Au = -\Delta u. \end{array} \right.$$

Si $u \in D(A)$ on a encore $u \in C^{2-\epsilon}(\bar{\Omega})$.

EXEMPLE 3 : (cf. Attouch-Damlamian [2])

$$V = L^2(\Omega)$$

$$\Phi = 0$$

$$\varphi(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} j(\text{grad } u) & \text{si } u \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

où j est une application convexe continue de $\mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty[$ avec $j(0) = 0$
et coercive (c'est-à-dire $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{j(\xi)}{|\xi|} = +\infty$).

LEMME 1.9 :

1) φ est convexe s. c. i.

$$2) \varphi(u) + \varphi(\hat{u}) \geq \varphi(u - p(u - \hat{u})) + \varphi(\hat{u} + p(u - \hat{u})) \quad \forall u, \hat{u} \in V \quad \forall p \in P_0$$

$$3) \varphi(u) + \|u\|_2^2 \geq \|u\|_V^2.$$

preuve : φ étant positive, 3) est immédiat. De même, la convexité de j entraîne celle de φ .

Montrons l'hypothèse (H_3) . Soient $u, \hat{u} \in V$ et $p \in P_0$.

On suppose $\varphi(u) < +\infty$ et $\varphi(\hat{u}) < +\infty$:

$$\frac{\partial(u - p(u - \hat{u}))}{\partial x_i} = (1 - p'(u - \hat{u})) \frac{\partial u}{\partial x_i} + p'(u - \hat{u}) \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i}$$

$0 \leq p' \leq 1$ et j convexe entraînent :

$$j(\text{grad}(u - p(u - \hat{u}))) \leq (1 - p'(u - \hat{u})) j(\text{grad } u) + p'(u - \hat{u}) j(\text{grad } \hat{u}),$$

de même :

$$j(\text{grad}(\hat{u} + p(u - \hat{u}))) \leq (1 - p'(u - \hat{u})) j(\text{grad } \hat{u}) + p'(u - \hat{u}) j(\text{grad } u).$$

On additionne et on intègre, on obtient le résultat.

Montrons que φ est s. c. i. :

soit $\{u_n\} \subset L^2(\Omega)$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$

tels que $\varphi(u_n) \leq \lambda$. On a nécessairement $u_n \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$

$$\text{et } \varphi(u_n) = \int_{\Omega} j(\text{grad } u_n) \leq \lambda.$$

La coercivité de j implique :

$$\forall M > 0, \text{ il existe } C_M > 0 \text{ tel que } \forall \xi \in \mathbb{R}^N \quad |\xi| \leq C_M + \frac{j(\xi)}{M}.$$

$$\text{D'où } |\text{grad } u_n| \leq C_M + \frac{j(\text{grad } u_n)}{M}.$$

Donc pour tout $K \subset \Omega$ mesurable et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_K |\text{grad } u_n| \leq C_M |K| + \int_K \frac{j(\text{grad } u_n)}{M} \leq C_M |K| + \frac{\lambda}{M}.$$

On en déduit aisément que $\{|\text{grad } u_n|, n \in \mathbb{N}\}$ est équiintégrable sur Ω , donc, Ω étant de mesure finie, est faiblement relativement séquentiellement compact dans $L^1(\Omega)$ (cf. Dunford-Schwartz [15] p.294).

Or $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ donc dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, et $\frac{\partial}{\partial x_i}$ étant continu de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

On en déduit aisément que $\text{grad } u_n \rightharpoonup \text{grad } u$ dans $L^1(\Omega)^N$.

Alors il existe une suite $\{\sum_{k=1}^{p_n} a_k^n \text{grad } u_{n_k}, n \in \mathbb{N}\}$ de combinaisons convexes d'éléments $\text{grad } u_{n_k}$ qui converge fortement vers $\text{grad } u$ dans $L^1(\Omega)^N$ (cf. [15] p.422) (On a pour tout n $a_k^n \geq 0$ et $\sum_1^{p_n} a_k^n = 1$).

Donc, on peut en extraire une sous-suite, notée de la même manière, convergeant p.p. vers $\text{grad } u$.

Alors j étant continue, d'après le lemme de Fatou :

$$\begin{aligned} \varphi(u) = \int_{\Omega} j(\text{grad } u) &\leq \liminf_n \int_{\Omega} j\left(\sum_1^{p_n} a_k^n \text{grad } u_{n_k}\right) \\ &\leq \liminf_n \sum_1^{p_n} a_k^n \int_{\Omega} j(\text{grad } u_{n_k}) \quad j \text{ étant convexe} \\ &\leq \liminf_n \sum_1^{p_n} a_k^n \lambda = \lambda. \end{aligned}$$

*

A est défini par : (cf. [2])

$$(1.15) \quad v \in Au \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u \in D(\varphi) \cap L^\infty(\Omega) \\ v \in L^\infty(\Omega) \\ \exists f \in (L^1(\Omega))^N \text{ tel que : } v = -\operatorname{div} f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ f \in \partial j(\operatorname{grad} u) \text{ p.p. sur } \Omega \\ \int_\Omega u v = \int_\Omega f \operatorname{grad} u \text{ (si } j \text{ est paire,} \\ \text{cette condition est auto-} \\ \text{matiquement vérifiée).} \end{array} \right.$$

REMARQUE 1.7 :

Prenons pour j l'application définie sur $\mathbb{R}^N$ par :

$$(1.16) \quad j(\xi) = \frac{1}{p} (|\xi_1|^p + \dots + |\xi_N|^p) \quad 1 < p < \infty$$

Nous avons alors :

$$D(\varphi) = W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$$

$$D(A) = \{u \in W_0^{1,1} \cap L^\infty(\Omega) / |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^{p-1} \in L^1(\Omega), \Delta_p u \in L^\infty(\Omega)\}$$

$$Au = -\Delta_p u.$$

Donc l'opérateur A apparaît comme un prolongement de l'opérateur A de l'exemple 1 ; or ces opérateurs sont m -accrétifs dans $L^\infty(\Omega)$, ils sont donc égaux.

Le résultat d'Attouch donne un résultat de régularité, à savoir :

$$(1.17) \quad u \in W_0^{1,1 \vee p-1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad \text{et} \quad \Delta_p u \in L^\infty(\Omega) \Rightarrow u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

D'autre part, u est solution de $I(f, \lambda)$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in D(\varphi) \cap L^\infty(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \\ u \leq Mu \\ \int_\Omega \frac{1}{p} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p \geq \int_\Omega \frac{1}{p} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p + \int_\Omega \frac{f-u}{\lambda} (v-u) \\ \forall v \in W_0^{1,p} \cap L^2(\Omega) = D(\varphi) \\ v \leq Mu. \end{array} \right.$$

Or les inégalités :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} &\leq \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \right)^{p-1/p} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \frac{p-1}{p} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p + \frac{1}{p} \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p \end{aligned}$$

entraînent :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p \geq \langle -\Delta_p u, v - u \rangle + \int_{\Omega} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p$$

donc, si u est solution de

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \\ u \leq Mu \\ \langle -\Delta_p u, v - u \rangle \geq \int_{\Omega} \frac{f - u}{\lambda} (v - u) \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega), \quad v \leq Mu \end{cases}$$

u est solution de $I(f, \lambda)$.

On en déduit que l'opérateur C défini dans cet exemple est un prolongement de l'opérateur C défini dans l'exemple 1.

IV. PROPRIETES PARTICULIERES DE L'OPERATEUR C :

- 1) UNICITE : Avec une hypothèse d'unicité, nous pouvons caractériser un élément de C comme solution d'une I. Q. V., plus précisément :

PROPOSITION 1.2 : Supposons que l'on ait le résultat d'unicité suivant :
 "pour tout $\lambda > 0$ et tout $f \in L^\infty(\Omega)$, s'il existe une solution de $I(f, \lambda)$ elle est unique", alors $f \in Cu$ si et seulement si u est solution de l'I. Q. V. $I(f)$

$$I(f) \quad \begin{cases} u \in D \\ \varphi(v) + \langle \mathbb{A}u, v - u \rangle \geq \varphi(u) + \int_{\Omega} f(v - u) \quad \forall v \in V \quad v \leq Mu. \end{cases}$$

preuve : Elle découle, compte tenu de l'hypothèse d'unicité des deux équivalences suivantes ; $\lambda > 0$ étant donné :

- $f \in Cu$ si et seulement si u est solution maximum de $I(u + \lambda f, \lambda)$ (cf. prop. 1.1)
- u est solution de $I(u + \lambda f, \lambda)$ si et seulement si u est solution de $I(f)$.

*

EXEMPLE : Nous avons la propriété d'unicité de la proposition 1.2, dans le cas de l'opérateur considéré par Laetsch (cf. [19]), c'est-à-dire celui de l'exemple 2 avec $j = 0$ (condition de Neumann) et M vérifiant :

- 1) $M(u + c) = M(u) + c \quad \forall u \in L^\infty(\Omega) \quad \text{et} \quad c \text{ constante ;}$
- 2) La condition de Laetsch :
 $\forall u \in L^\infty(\Omega)^+, \quad \forall \alpha \in [0, 1[, \text{ il existe } \beta \in]\alpha, 1[\text{ tel que } M(\alpha u) \geq \beta Mu.$

(conditions vérifiées par $M : Mu = k + I(u) \quad k \in L^\infty(\Omega)^+$).

En effet :

soient $\lambda > 0$, $f \in D_\lambda$ et u_1 et u_2 deux solutions de $I(f, \lambda)$.

Nous allons nous ramener au cas positif :

Soit m constante telle que : $m \leq u_1 \wedge u_2 \wedge f$.

Posons : $\bar{u}_1 = u_1 - m$

$\bar{u}_2 = u_2 - m$

$\bar{f} = f - m.$

Soit $\bar{v} \in H_1(\Omega)$ $\bar{v} \leq M\bar{u}_j$ $j = 1$ ou 2 , alors $v = \bar{v} + m \in H^1(\Omega)$
et $v \leq Mu_j$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}\bar{u}_j, \bar{v} - \bar{u}_j \rangle &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \frac{\partial (\bar{v} - \bar{u}_j)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial (v - u_j)}{\partial x_i} \\ &\geq \int_{\Omega} \frac{f - u_j}{\lambda} (v - u_j) = \int_{\Omega} \frac{\bar{f} - \bar{u}_j}{\lambda} (\bar{v} - \bar{u}_j) \end{aligned}$$

donc $\bar{u}_1$ et $\bar{u}_2$ sont solutions de $I(\bar{f}, \lambda)$,

$\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{f}$ étant positifs, d'après le théorème de Laetsch

(cf. [19]) $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$

c'est-à-dire $u_1 = u_2$.

*

2) FERMETURE : Nous rappelons la définition de l'ensemble D :

$D = \{u \in L^\infty(\Omega) / u \leq Mu, \text{ il existe } w \in D(\varphi) \text{ tel que } w \leq Mu\}$.

Nous avons l'inclusion évidente : $0 \in D(C) \subset D$.

PROPOSITION 1.3 :

- i) C est fermé dans $D \times L^\infty(\Omega)$,
- ii) Si D est fermé dans $L^\infty(\Omega)$ alors C est un opérateur fermé de $L^\infty(\Omega)$,
- iii) C est un opérateur fermé de $L^\infty(\Omega)$ si et seulement si D_λ est fermé pour tout $\lambda > 0$.

preuve : i) Soit $\{(u_n, v_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de C convergeant vers (u, v)
dans $D \times L^\infty(\Omega)$. Soit $\lambda > 0$, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f_n \in D_\lambda$
tel que : $u_n = J_\lambda f_n$

$$v_n = \frac{f_n - J_\lambda f_n}{\lambda}.$$

Il vient que $f_n \rightarrow f = u + \lambda v$ dans $L^\infty(\Omega)$.

Pour tout p fini, nous pouvons écrire :

$$\|J_\lambda^E f - u\|_p \leq \|J_\lambda^E f - J_\lambda^E f_n\|_p + \|J_\lambda^E f_n - J_\lambda f_n\|_p + \|J_\lambda f_n - u\|_p$$

J_λ^E étant une contraction de $L^\infty(\Omega)$:

$$\|J_\lambda^E f - J_\lambda^E f_n\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty, \text{ donc } J_\lambda^E f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J_\lambda^E f \text{ dans } L^\infty(\Omega)$$

donc dans $L^p(\Omega)$, uniformément par rapport à $\epsilon > 0$.

$J_\lambda^\epsilon f_n \xrightarrow{\epsilon \searrow 0} J_\lambda f_n$ dans $L^p(\Omega)$ pour tout n

et $J_\lambda f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ dans $L^\infty(\Omega)$ donc dans $L^p(\Omega)$.

Nous pouvons en conclure que $J_\lambda^\epsilon f \xrightarrow{\epsilon \searrow 0} u$ dans $L^p(\Omega)$.

Nous pouvons donc affirmer que $u = L_*^\infty \lim_{\epsilon \searrow 0} J_\lambda^\epsilon f$.

Comme $u \in D$, d'après la remarque 1.4 du théorème 1.1,

cela entraîne que $u = J_\lambda f$ et $v = \frac{f - J_\lambda f}{\lambda}$ c'est-à-dire $(u, v) \in C$.

ii) est immédiat.

iii) résulte de $D_\lambda = R(I + \lambda C)$ pour tout $\lambda > 0$ et pour tout

opérateur accréatif, C est fermé si et seulement si $R(I + \lambda C)$

est fermé pour tout $\lambda > 0$. Démontrons-le :

Supposons C fermé, soit $\{f_n\} \subset R(I + \lambda C)$ avec $f_n \rightarrow f$ dans $L^\infty(\Omega)$.

$$f_n = u_n + \lambda v_n \quad (u_n, v_n) \in C$$

$u_n = J_\lambda f_n$, or J_λ est une contraction d'où :

$$\|u_n - u_m\|_\infty \leq \|f_n - f_m\|_\infty \text{ donc } \{u_n\} \text{ est une suite de Cauchy}$$

dans $L^\infty(\Omega)$ donc $u_n \rightarrow u$ dans $L^\infty(\Omega)$

$$\text{et } v_n \rightarrow v = \frac{f - u}{\lambda}.$$

C étant fermé $(u, v) \in C$ d'où $f = u + \lambda v \in R(I + \lambda C)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $R(I + \lambda C)$ soit fermé.

Soit $(u_n, v_n) \in C$ tel que $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$

$$u_n = J_\lambda f_n \text{ avec } f_n = u_n + \lambda v_n \in R(I + \lambda C)$$

$$\text{donc } f = \lim f_n = u + \lambda v \in R(I + \lambda C)$$

J_λ étant continu $J_\lambda f_n \rightarrow J_\lambda f$ donc $u = J_\lambda f$ c'est-à-dire

$$(u, v) \in C.$$

Examinons l'ensemble D et l'opérateur C dans les différents exemples.

PROPOSITION 1.4 : Les opérateurs étant ceux des exemples 1 et 3 et M étant défini par $Mu = k + I(u)$ $k \in L^\infty(\Omega)^+$:

1) Si k est croissante,

$$u \in D \Leftrightarrow u \in L^\infty(\Omega), u \leq Mu \quad \text{et} \quad Mu \geq 0.$$

Cet ensemble est fermé dans $L^\infty(\Omega)$ et donc C est fermé.

2) Si k est une constante positive, on a la condition d'image de Crandall

Liggett [14] :

$$D(C) \subset R(I + \lambda C) \quad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

preuve : 1) Si l'on remarque que dans les exemples 1 et 3

$$D\varphi \subset W_0^{1,1}(\Omega) \quad \text{et} \quad \varphi(0) = 0 \quad 1) \text{ résulte du lemme suivant :}$$

LEMME 1.10 : Soit M définie par $Mu = k + I(u)$, $k \in L^\infty(\Omega)^+$ croissante.

Soit $u \in L^\infty(\Omega)$ tel que il existe $w \in W_0^{1,1}(\Omega)$, $w \leq Mu$, alors $Mu \geq 0$.

preuve du lemme 1.10 : Soit $u \in L^\infty(\Omega)$ tel que $w \in W_0^{1,1}(\Omega)$ et $w \leq Mu$.

Comme $w \in L^1(\Omega)$, pour tout point de Lebesgue x de w , $w(x) \leq Mu(x)$. D'autre part, il existe une suite $\{y_n\} \subset \Omega$ de points de Lebesgue de w telle que $y_n \leq x$ et $w(y_n) \rightarrow 0$.

En remarquant que si k est croissante sur Ω , $Mu = k + I(u)$ est croissante ; nous avons :

$$w(y_n) \leq Mu(y_n) \leq Mu(x) \Rightarrow 0 \leq Mu(x)$$

or l'ensemble des points de Lebesgue est de complémentaire négligeable (cf. Dunford-Schwartz [15] p.218) donc $Mu \geq 0$ p.p.

Remarquons que si k est s.c.s. (en particulier si k est constante) Mu est s.c.s. et alors $Mu \geq 0$ partout sur Ω .

*

2) Supposons k constante ≥ 0 . D étant fermé dans $L^\infty(\Omega)$

(car M continue sur $L^\infty(\Omega)$), C et donc $D_\lambda \quad \forall \lambda > 0$ sont

fermés dans $L^\infty(\Omega)$. Il suffit donc de montrer que $D(C) \subset D_\lambda$.

Or ceci provient du lemme suivant :

LEMME 1.11 : Si $M = k + I$ avec $k \in L^\infty(\Omega)^+$ pour tout V, φ vérifiant les hypothèses $V_1, V_2, H_1, \dots, H_4$,
 $\{f \in L^\infty(\Omega) / f \geq -\inf \text{ess } k\} \subset D_\lambda$ pour tout $\lambda > 0$.

En effet, supposons ce lemme et soit $u \in D(C)$, alors $u \leq Mu$ et $u \in D(\varphi) \subset W_0^{1,1}(\Omega)$ alors d'après le lemme 1.10 $Mu \geq 0$.
 D'après la propriété 3) de M , $u \geq -k$ p.p., donc d'après le lemme 1.11 $u \in D_\lambda$.

*

preuve du lemme 1.11 :

Soient $f \in L^\infty(\Omega)$ avec $f \geq -\inf \text{ess } k$ p.p. et $u_0 = J_\lambda^A(f \wedge 0)$, alors par T-accrétivité de A ,
 $-||f^-||_\infty \leq u_0 \leq 0$, d'où :
 $-\inf \text{ess } k \leq u_0 \leq 0$, d'où :
 $I(u_0) + k \geq 0$ c'est-à-dire $M(u_0) \geq 0$.
 On en déduit : $u_0 \leq Mu_0$,
 d'où $f \geq f \wedge 0 = u_0 + \lambda v_0$ où $v_0 \in Au_0$
 et d'après la remarque 1.6 $f \in D_\lambda$.

*

REMARQUE 1.8 : Dans les exemples 1 et 3 si $k = 0$ dans M alors
 $D(C) = \{0\}$ et $C0 \supset L^\infty(\Omega)^+$ avec égalité dans l'exemple 1.

En effet, nous avons alors $u \leq Mu = I(u) \Leftrightarrow u = I(u)$ p.p.
 Si $u \in D(C)$, $Mu = I(u) \geq 0$ partout sur Ω et $I(u)$ est croissante sur Ω . Alors par un raisonnement analogue à celui de la preuve du lemme 1.10 on en déduit $u = 0$ p.p.
 Comme pour tout $f \in L^\infty(\Omega)^+$, et tout $\lambda > 0$, $J_\lambda f$ existe, on en déduit que $f \in C0$.
 Réciproquement, comme il y a unicité de la solution, si elle existe, de $I(f, \lambda)$, d'après la proposition 1.2,
 $f \in C0 \Leftrightarrow \varphi(v) \geq \int_\Omega f v \quad \forall v \in V \quad v \leq 0$.

Dans l'exemple 1 où $\varphi = 0$:

$$f \in C_0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} f v \leq 0 \quad \forall v \in V \quad v \leq 0.$$

Soit $g = f \wedge 0$, alors il existe $\{v_n\} \subset V$ telle que $v_n \rightarrow g$ dans $L^2(\Omega)$,

on peut toujours supposer $v_n \leq 0$, on en déduit :

$$\int_{\Omega} (f^-)^2 = \int_{\Omega} f g \leq 0 \Rightarrow f \in L^{\infty}(\Omega)^+.$$

*

PROPOSITION 1.5 : Dans l'exemple 2 si $D(j) \supset]-\infty, 0]$ et M vérifiant

M_1 et M_2 :

1) $u \in D$ si et seulement si $u \in L^{\infty}(\Omega)$ et $u \leq Mu$.

2) C est m - T -accrétif.

En effet, si $u \leq Mu$ soit w constante $\leq -\|Mu\|_{\infty}$ alors $w \in D(\varphi)$ et $w \leq Mu$ donc $u \in D$.

D'autre part, soit $f \in L^{\infty}(\Omega)$ et soit w une constante ≤ 0 telle que $w \leq M(-\|f^-\|_{\infty})$

pour tout $\varepsilon > 0$: $-\|f^-\|_{\infty} \leq J_{\lambda}^{\varepsilon} f$

donc si $u = L_{*}^{\infty} \lim_{\varepsilon \searrow 0} J_{\lambda}^{\varepsilon} f$: $-\|f^-\|_{\infty} \leq u$

M étant croissante, $w \leq Mu$

alors, d'après le lemme 1.5 $u = J_{\lambda} f$.

*

En particulier, la condition est réalisée si $j = 0$ (condition de Neumann).

- CHAPITRE II -

PROBLEME D'EVOLUTION =====

Les notations et les hypothèses sur $\Omega, V, M, \mathcal{A}, \varphi$ sont les mêmes que celles du Chapitre I.

A l'opérateur C construit dans le chapitre précédent nous allons associer un semi-groupe de T -contractions non linéaires et nous allons montrer que sous certaines conditions il est solution d'une I. Q. V. d'évolution associée à $M, \mathcal{A}$ et φ .

I. SEMI-GROUPES :

1) SEMI-GROUPE ASSOCIE A C :

Nous considérons un sous-ensemble D_S de $L^\infty(\Omega)$ vérifiant :

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_S \subset \overline{D(C)} \\ D_S \subset \bigcap_{\lambda > 0} D_\lambda \\ J_\lambda D_S \subset D_S. \end{array} \right.$$

EXEMPLES : 1) Dans le cas général, nous pouvons toujours prendre pour D_S , $\overline{D(C)} \cap L^\infty(\Omega)^+$ car $L^\infty(\Omega)^+ \subset \bigcap_{\lambda > 0} D_\lambda$ (cf. remarque 1.5) et $J_\lambda (L^\infty(\Omega)^+) \subset L^\infty(\Omega)^+$ (cf. lemme 1.4).

2) Dans les exemples 1 et 3 avec $M = k + I$, où k est une constante positive, et dans l'exemple 2 lorsque $D(j) \supset]-\infty, 0]$, $D_S = \overline{D(C)}$ convient, car, ainsi que nous l'avons montré, C vérifie alors la condition d'image $\overline{D(C)} \subset R(I + \lambda C)$, de Crandall Liggett.

Nous allons définir le semi-groupe de T-contractions associé à C :
soient $\epsilon > 0$, $u_0 \in \bar{D}_S$ et $u_0^\epsilon \in D_S$ tels que $\|u_0 - u_0^\epsilon\|_\infty < \epsilon$, considérons
l'"équation" approchée (ou schéma implicite)

$$(2.2) \quad \begin{cases} \frac{u_\epsilon(t) - u_\epsilon(t - \epsilon)}{\epsilon} + C u_\epsilon(t) \ni 0 & \text{si } t > 0 \\ u_\epsilon(t) = u_0^\epsilon & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

C étant accréatif dans $L^\infty(\Omega)$, l'équation 2.2 s'écrit :

$$\begin{cases} u_\epsilon(t) = J_\epsilon(u_\epsilon(t - \epsilon)) & \text{si } t > 0 \\ u_\epsilon(t) = u_0^\epsilon & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

et elle admet une solution et une seule (pour ϵ, u_0 et u_0^ϵ donnés).

Donc $u_\epsilon(t) = (1 + \epsilon C)^{-k} u_0^\epsilon$ pour tout $t \in [(k-1)\epsilon, k\epsilon]$, $k \in \mathbb{N}^*$, ou

$$(2.3) \quad u_\epsilon(t) = (1 + \epsilon C)^{\left[-\frac{t}{\epsilon}\right]} u_0^\epsilon \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

(où $[r]$ désigne la partie entière de r).

D'après Crandall-Liggett [14] $u_\epsilon(t)$ converge uniformément sur tout compact de $[0, +\infty[$, dans $L^\infty(\Omega)$ vers $u(t) \in \bar{D}_S$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$, et $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[, L^\infty(\Omega))$. u peut être interprété comme solution limite ou ℓ -solution (cf. Pierre [23]) sur $[0, +\infty[$ dans $L^\infty(\Omega)$ du problème de Cauchy :

$$CP(C, 0, u_0) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + C u \ni 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

C étant accréatif dans $L^\infty(\Omega)$, u peut aussi être interprété comme une solution intégrale ou comme une bonne solution (cf. Bénéilan [4]) sur $[0, +\infty[$ du problème de Cauchy $CP(C, 0, u_0)$ et cette solution est alors unique en tant que ℓ -solution ou bonne solution (elle ne dépend que de u_0 et non du choix des u_0^ϵ).

Notons $u(t) = S(t)u_0$, alors $S(t)$ est un semi-groupe continu de T-contractions non linéaires défini sur $\bar{D}_S$, plus précisément (cf. Bénilan [4]) :

- 2.4) $\left\{ \begin{array}{l} 1) S(t) \text{ applique } \bar{D}_S \text{ dans } \bar{D}_S \text{ pour tout } t \geq 0 ; \\ 2) S(0)u = u \text{ pour tout } u \in \bar{D}_S ; \\ 3) S(t+s)u = S(t)S(s)u \text{ pour tout } u \in \bar{D}_S \text{ et tout } t, s \geq 0 ; \\ 4) \lim_{t \searrow 0} \|S(t)u - u\|_\infty = 0 \text{ pour tout } u \in \bar{D}_S ; \\ 5) \|(S(t)u - S(t)v)^+\|_\infty \leq \|(u - v)^+\|_\infty \text{ pour tout } u, v \in \bar{D}_S. \end{array} \right.$

Ce dernier point provient de la T-accrétivité de C qui entraîne que :
 $t \mapsto S(t)u$ est une solution T-intégrale à gauche et à droite de

$$\frac{du}{dt} + Cu \ni 0 \quad (\text{cf. proposition 1.27 de [4]}).$$

LEMME 2.1 :

Si $u_0 \in D_S$,

$$S(t)u_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}C\right)^{-n} u_0 \text{ pour tout } t \geq 0$$

la convergence étant uniforme pour $t \geq 0$ borné.

En effet, d'après Crandall-Liggett [14], $\left(1 + \frac{t}{n}C\right)^{-n} u_0$ converge uniformément pour t borné et la limite est la même que celle de $\left(1 + \frac{t}{n}C\right)^{[-nt]} u_0$ qui est $S(t)u_0$ d'après (2.3) et la définition du semi-groupe.

*

2) SEMI-GROUPE ASSOCIE A C_ϵ :

$C_\epsilon = A + B_\epsilon$ étant un opérateur m-T-accrétif de $L^\infty(\Omega)$, nous pouvons lui associer, de la même manière que pour C , un semi-groupe continu de T-contractions non linéaires défini sur $\overline{D(C_\epsilon)} = \overline{D(A)}$ à valeurs dans $\overline{D(A)}$; notons-le $S^\epsilon(t)$ pour $t \geq 0$.

Il vérifie les propriétés (2.4) et pour tout $u_0 \in \overline{D(A)}$ et tout $t \geq 0$

$$(2.5) \quad S^\epsilon(t)u_0 = L^\infty \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n} C_\epsilon\right)^{-n} u_0.$$

PROPOSITION 2.1 :

Pour tout $u_0 \in D(A)$, $u_\epsilon(t) = S^\epsilon(t)u_0$ est l'unique solution du problème :

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_\epsilon \in C([0, \infty[, L^\infty(\Omega)) \\ u_\epsilon(0) = u_0 \\ u_\epsilon \in \bigcap_{1 < p < \infty} W^{1, \infty}([0, +\infty[, L^p(\Omega)) \\ \frac{du_\epsilon}{dt}(t) + C_\epsilon u_\epsilon(t) \ni 0 \quad \text{p.p. } t \geq 0. \end{array} \right.$$

preuve : Par définition du semi-groupe $S^\epsilon(t)$, les deux premiers points sont déjà vérifiés.

Comme $u_0 \in D(A) = D(C_\epsilon)$, d'après Bénilan ([4] prop. 1.6) u_ϵ est lipschitzienne de $[0, +\infty[$ dans $L^\infty(\Omega)$ de rapport $\delta_\epsilon = \|C_\epsilon u_0\|$ et donc est lipschitzienne de $[0, +\infty[$ dans $L^p(\Omega)$ ($1 < p < \infty$).

$L^p(\Omega)$ étant réflexif, u_ϵ est presque partout fortement dérivable dans $L^p(\Omega)$ (cf. Brézis [9] appendice) et $\frac{du_\epsilon}{dt} \in L^\infty([0, \infty[, L^p(\Omega))$, en effet :

$$\left\| \frac{u_\epsilon(t+h) - u_\epsilon(t)}{h} \right\|_\infty \leq \delta_\epsilon \quad \forall t \geq 0 \quad \forall h > 0.$$

Comme $\frac{u_\epsilon(t+h) - u_\epsilon(t)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{du_\epsilon}{dt}(t)$ dans $L^p(\Omega)$ pour presque tout

$t \geq 0$, il existe une sous-suite qui converge presque partout sur Ω vers $\frac{du_\epsilon}{dt}(t)$, p.p. $t \geq 0$, et

$$(2.7) \quad \left\| \frac{du_\epsilon}{dt} \right\|_{L^\infty([0, +\infty[\times \Omega)} \leq \|C_\epsilon u_0\|.$$

D'autre part, B_ϵ étant lipschitzienne sur $L^\infty(\Omega)$, d'après Pierre ([23] prop. 1.6), u_ϵ est ℓ -solution dans $L^\infty(\Omega)$ sur $[0, +\infty[$ du problème de Cauchy $CP(A, g, u_0)$ où $g(t) = -B_\epsilon(u_\epsilon(t))$;

u_ϵ est aussi ℓ -solution dans $L^p(\Omega)$ ($1 < p < \infty$) du problème de Cauchy $CP(\bar{A}^{L^p}, g, u_0)$ où $\bar{A}^{L^p}$ est la fermeture de A dans $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$. Or A étant accréatif dans $L^p(\Omega)$ et m -accréatif dans $L^\infty(\Omega)$, $\bar{A}^{L^p}$ est m -accréatif dans $L^p(\Omega)$. D'après Bénéilan ([4] prop. 1.5), u_ϵ est solution forte de $CP(\bar{A}^{L^p}, g, u_0)$, c'est-à-dire

$$\frac{du_\epsilon}{dt}(t) + \bar{A}^{L^p} u_\epsilon(t) \ni -B_\epsilon(u_\epsilon(t)) \quad \text{p.p. } t \geq 0$$

or, d'après (2.7), $\frac{du_\epsilon}{dt}(t) \in L^\infty(\Omega)$ p.p. $t \geq 0$, il s'en suit que :

$$\frac{du_\epsilon}{dt}(t) + A u_\epsilon(t) + B_\epsilon u_\epsilon(t) \ni 0 \quad \text{p.p. } t \geq 0,$$

car $A = \bar{A}^{L^p} \cap L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ (cf. Hâ [17] prop. 1.5).

Il reste à montrer l'unicité :

soit $\bar{u}$ une autre solution de (2.6) ; c'est une solution forte dans $L^p(\Omega)$ sur $[0, +\infty[$ du problème de Cauchy $CP(A, \bar{g}, u_0)$ où $\bar{g}(t) = -B_\epsilon(\bar{u}(t))$ et donc, d'après Bénéilan ([4] lemme 1.1) :

$$\|u_\epsilon(t) - \bar{u}(t)\|_p \leq \int_0^t \|B_\epsilon u_\epsilon(\tau) - B_\epsilon \bar{u}(\tau)\|_p d\tau \quad \forall t \geq 0.$$

Faisons tendre p vers l'infini, il vient :

$$\|u_\epsilon(t) - \bar{u}(t)\|_\infty \leq \int_0^t \|B_\epsilon u_\epsilon(\tau) - B_\epsilon \bar{u}(\tau)\|_\infty d\tau.$$

B_ϵ étant lipschitzienne,

$$\|u_\epsilon(t) - \bar{u}(t)\|_\infty \leq \frac{2}{\epsilon} \int_0^t \|u_\epsilon(\tau) - \bar{u}(\tau)\|_\infty d\tau.$$

Alors, d'après le lemme de Gronwall (cf. Brézis [9] appendice),

$$u_\epsilon(t) = \bar{u}(t) \quad \forall t \geq 0.$$

3) Nous allons, dans le théorème suivant, expliciter le lien existant entre les semi-groupes $S^\epsilon(t)$ et $S(t)$.

THEOREME 2.1 :

Soit $u_0 \in D_S \cap D(C)$.

Pour tout $\lambda > 0$, tout $f \in D_\lambda$ tels que $u_0 = J_\lambda(f)$:

$$S(t)u_0 = L_*^\infty \cdot \lim_{\epsilon \searrow 0} S^\epsilon(t) \left(J_\lambda^\epsilon f \right).$$

Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 2.2 :

1) $\|S^\epsilon(t)u\|_\infty \leq \|u\|_\infty \quad \forall \epsilon > 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u \in \overline{D(A)} ;$

2) $S^\epsilon(t)u \leq S^\eta(t)v \quad \text{pour } \epsilon \leq \eta, u \leq v \quad u, v \in \overline{D(A)} \quad \text{et} \quad \forall t \geq 0.$

preuve du théorème : λ et f étant fixés tels que $J_\lambda f = u_0$, notons $u_0^\epsilon = J_\lambda^\epsilon f$.

Nous rappelons (cf. théorème 1.1) que $u_0 = L_*^\infty \cdot \lim_{\epsilon \searrow 0} u_0^\epsilon$ et donc d'après le lemme précédent :

$$\epsilon < \eta \Rightarrow S^\epsilon(t)u_0^\epsilon \leq S^\eta(t)u_0^\eta, \quad \forall t \geq 0$$

et $\|S^\epsilon(t)u_0^\epsilon\|_\infty \leq \|u_0^\epsilon\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad (\text{cf. lemme 1.4})$

donc $L_*^\infty \cdot \lim_{\epsilon \searrow 0} S^\epsilon(t)u_0^\epsilon$ existe dans $L^\infty(\Omega)$, il suffit alors de montrer

que $S^\epsilon(t)u_0^\epsilon \rightarrow S(t)u_0$ dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$:

$$\begin{aligned} \|S(t)u_0 - S^\epsilon(t)u_0^\epsilon\|_p &\leq \|S(t)u_0 - \left(I + \frac{t}{n}C\right)^{-n} u_0\|_p \\ &+ \left\| \left(I + \frac{t}{n}C\right)^{-n} u_0 - \left(I + \frac{t}{n}C_\epsilon\right)^{-n} u_0^\epsilon \right\|_p + \left\| \left(I + \frac{t}{n}C_\epsilon\right)^{-n} u_0^\epsilon - S^\epsilon(t)u_0^\epsilon \right\|_p. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.1 $\left(I + \frac{t}{n}C\right)^{-n} u_0 \rightarrow S(t)u_0$ dans $L^\infty(\Omega)$ donc

(2.8) $\|S(t)u_0 - \left(I + \frac{t}{n}C\right)^{-n} u_0\|_p \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$

Comme $u_0 = L_*^\infty \cdot \lim_{\epsilon \searrow 0} u_0^\epsilon$, par récurrence sur n il est immédiat,

d'après le lemme 1.6, que $\left(I + \lambda C\right)^{-n} u_0 = L_*^\infty \cdot \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(I + \lambda C_\epsilon\right)^{-n} u_0^\epsilon$,

et donc :

$$(2.9) \quad \left\| \left(I + \frac{t}{n} C \right)^{-n} u_0 - \left(I + \frac{t}{n} C_\epsilon \right)^{-n} u_0^\epsilon \right\|_p \rightarrow 0 \quad \text{quand } \epsilon \searrow 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

C_ϵ étant accréatif dans $L^\infty(\Omega)$ nous avons d'après Crandall-Liggett [14] :

$$\left\| \left(I + \frac{t}{n} C_\epsilon \right)^{-n} u_0^\epsilon - S^\epsilon(t) u_0^\epsilon \right\|_\infty \leq 2 \|u_0^\epsilon - \xi_\epsilon\|_\infty + \frac{2t}{\sqrt{n}} \|\eta_\epsilon\|_\infty,$$

$$\forall (\xi_\epsilon, \eta_\epsilon) \in C_\epsilon.$$

$$\text{Prenons } \xi_\epsilon = u_0^\epsilon \quad \text{et} \quad \eta_\epsilon = \frac{f - u_0^\epsilon}{f} = \frac{f - J_\lambda^\epsilon f}{\lambda}$$

$$\text{alors } \|\eta_\epsilon\|_\infty \leq \frac{2 \|f\|_\infty}{\lambda} \quad \text{et donc}$$

$$(2.10) \quad \left\| \left(I + \frac{t}{n} C_\epsilon \right)^{-n} u_0^\epsilon - S^\epsilon(t) u_0^\epsilon \right\|_p \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \text{ uniformément par rapport à } \epsilon.$$

Nous déduisons alors aisément de (2.8), (2.9) et (2.10) que :

$$S^\epsilon(t) u_0^\epsilon \rightarrow S(t) u_0 \quad \text{dans } L^p(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty) \quad \text{lorsque } \epsilon \searrow 0.$$

*

preuve du lemme 2.2 :

Soit $u \in \overline{D(A)}$ et notons $u_\epsilon(t) = S^\epsilon(t)u \quad \forall t \geq 0.$

u_ϵ étant solution intégrale de $\frac{du}{dt} + C_\epsilon u \ni 0$, nous avons l'inégalité suivante (cf. Bénéilan [4]) :

$$(2.11) \quad \|u_\epsilon(t) - x\|_\infty \leq \|u_\epsilon(s) - x\|_\infty + (t - s) \|y\|_\infty \quad \forall (x, y) \in C_\epsilon, \quad \forall 0 \leq s \leq t.$$

Comme $(0, 0) \in C_\epsilon$, nous en déduisons :

$$\|u_\epsilon(t)\|_\infty \leq \|u\|_\infty.$$

Soit $\epsilon < \eta$ et $u \in \overline{D(A)}$, d'après Pierre ([23] prop. 1.6),

u_ϵ est ℓ -solution dans $L^\infty(\Omega)$ sur $[0, \infty[$ de $CP(C_\eta, g, u)$ où $g(t) = B_\eta u_\epsilon(t) - B_\epsilon u_\epsilon(t).$

Or C_η étant T -accréatif, d'après Bénéilan ([4] prop. 1.27),

u_ϵ est solution T -intégrale du problème de Cauchy $CP(C_\eta, g, u)$

u_η est solution T -intégrale du problème de Cauchy $CP(C_\eta, 0, u)$

et l'on a :

$$\|(u_\epsilon(t) - u_\eta(t))^+\|_\infty \leq \|(u_\epsilon(s) - u_\eta(s))^+\|_\infty + \int_s^t \|g(\tau)^+\|_\infty d\tau \quad \forall 0 \leq s \leq t.$$

Or, ici, $g(\tau) = B_\eta u_\epsilon(\tau) - B_\epsilon u_\epsilon(\tau) \leq 0$, car $\epsilon < \eta$ et $u_\epsilon(0) = u_\eta(0) = u$
d'où $u_\epsilon(t) \leq u_\eta(t) \quad \forall t \geq 0$.

Maintenant si $u, v \in \overline{D(A)}$ et $u \leq v$, d'après (2.4) :

$$S^\epsilon(t)u \leq S^\epsilon(t)v \quad \forall t \geq 0$$

d'où si $\epsilon \leq \eta$ et $u \leq v$:

$$S^\epsilon(t)u \leq S^\epsilon(t)v \leq S^\eta(t)v \quad \forall t \geq 0.$$

*

COROLLAIRE :

Si $u_0 \in \overline{D(A) \cap D_S}$ alors :

$$S(t)u_0 = L_*^\infty \cdot \lim_{\epsilon \searrow 0} S^\epsilon(t)u_0.$$

preuve : D'après le lemme 2.2, $L_*^\infty \cdot \lim_{\epsilon \searrow 0} S^\epsilon(t)u_0$ existe dans $L^\infty(\Omega)$.

Il suffit, comme précédemment, de montrer que :

$$S^\epsilon(t)u_0 \rightarrow S(t)u_0 \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ pour } 1 \leq p < \infty.$$

Si $u_0 \in D(A) \cap D_S \subset \overline{D(C)}$, alors $u_0 \leq Mu_0$, donc si $v_0 \in Au_0$

$$u_0 + C_\epsilon u_0 \ni u_0 + v_0 \quad \forall \epsilon > 0, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$u_0 = J_1^\epsilon(u_0 + v_0) \quad \forall \epsilon > 0$$

et comme $u_0 \in D(A) \subset D(\varphi)$ alors $u_0 \in D$ et d'après la remarque 1.4

$$u_0 = J_1(u_0 + v_0) \quad (u_0 \in D(C)).$$

On peut donc appliquer le théorème 2.1 avec $f = u_0 + v_0$ et $u_0^\epsilon = u_0$
 $\forall \epsilon > 0$.

Si $u_0 \in \overline{D(A) \cap D_S}$, soit $u_0^n \in D(A) \cap D_S$ tels que $u_0^n \rightarrow u_0$ dans $L^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|S(t)u_0 - S^\epsilon(t)u_0\|_p &\leq \|S(t)u_0 - S(t)u_0^n\|_p + \|S(t)u_0^n - S^\epsilon(t)u_0^n\|_p \\ &\quad + \|S^\epsilon(t)u_0^n - S^\epsilon(t)u_0\|_p \end{aligned}$$

$$\text{or } \|S(t)u_0 - S(t)u_0^n\|_\infty \leq \|u_0 - u_0^n\|_\infty$$

$$\|S^\epsilon(t)u_0 - S^\epsilon(t)u_0^n\|_\infty \leq \|u_0 - u_0^n\|_\infty \quad (\text{cf. (2.4)})$$

$$\text{et } \|S(t)u_0^n - S^\epsilon(t)u_0^n\|_p \rightarrow 0 \quad \text{quand } \epsilon \searrow 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit aisément que $S^\epsilon(t)u_0 \rightarrow S(t)u_0$ dans $L^p(\Omega)$ quand $\epsilon \searrow 0$.

*

REMARQUE 2.1 : Nous avons vu au cours de la démonstration que :

$$D(A) \cap \overline{D(C)} = D(A) \cap D(C) = D_0 = \{u \in D(A) / u \leq Mu\} \quad (\text{cf. remarque 1.6})$$

en particulier : $D(A) \cap D_S \subset D(C)$.

II. I. Q. V. D'EVOLUTION :

(H'_1) Nous supposons désormais que $\mathcal{A}$ vérifie de plus l'hypothèse " $\mathcal{A}$ est bornée sur les bornés de V ".

Remarquons que cette condition est vérifiée dans les différents exemples présentés dans le Chapitre I.

DEFINITION 2.1 :

Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap V$, nous dirons que u est solution forte de l'I. Q. V. d'évolution $IE(u_0)$ associée à $M, \mathcal{A}$ et φ , si pour tout $T > 0$, u vérifie :

(S_1) $u \in C([0, +\infty[, L^\infty(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; V),$

$$\varphi(u) \in L^1(0, T),$$

$$u(t) \leq Mu(t) \quad \forall t \geq 0;$$

(S_2) $u(0) = u_0,$

(S_3) $\frac{du}{dt} \in L^\infty(]0, T[\times \Omega),$

(S_4) pour tout $v \in L^1(0, T; V)$ tel que $\varphi(v) \in L^1(0, T)$ et $v(t) \leq Mu(t)$ p.p. $t \in]0, T[$

$$\varphi(v(t)) + \int_\Omega \frac{du}{dt}(t) (v(t) - u(t)) + \langle \mathcal{A}u(t), v(t) - u(t) \rangle \geq \varphi(u(t)) \quad \text{p.p. } t \in]0, T[.$$

LEMME 2.3 : Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap V$, u vérifiant S_1, S_2, S_3 pour tout $T > 0$, est solution forte de $IE(u_0)$ si et seulement si :

(S'_4) $\int_0^T \varphi(v) + \int_0^T \int_\Omega \frac{du}{dt} (v - u) + \int_0^T \langle \mathcal{A}u(t), v(t) - u(t) \rangle \geq \int_0^T \varphi(u)$

$$\forall v \in L^1(0, T; V), v(t) \leq Mu(t) \quad \text{p.p. } t \in]0, T[.$$

preuve : Il est immédiat que (S_4) implique (S_4') . Supposons donc que

u vérifie $(S_1)(S_2)(S_3)(S_4')$ pour tout $T > 0$.

Soit $v \in L^1(0, T; V)$ tel que $\varphi(v) \in L^1(0, T)$ et $v(t) \leq Mu(t)$

p.p. $t \in]0, T[$.

Soit t_0 un point de Lebesgue dans $]0, T[$ de :

$$t \mapsto \varphi(v(t)) + \langle \mathcal{H}u(t) + \frac{du}{dt}(t), v(t) - u(t) \rangle - \varphi(u(t)).$$

Soit $\eta > 0$ assez petit pour que $|t - t_0| < \eta \Rightarrow t \in [0, T]$ et soit

$$w(t) = \begin{cases} v(t) & \text{pour presque tout } t \text{ tels que } |t - t_0| < \eta \\ u(t) & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Alors $w \in L^1(0, T; V)$, $\varphi(w) \in L^1(0, T)$ et $w(t) \leq Mu(t)$ p.p. $t \in]0, T[$.

Nous avons alors d'après (S_4') :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\eta} \int_{t_0 - \eta}^{t_0 + \eta} \varphi(v(t)) + \frac{1}{2\eta} \int_{t_0 - \eta}^{t_0 + \eta} \langle \mathcal{H}u(t) + \frac{du}{dt}(t), v(t) - u(t) \rangle \\ \geq \frac{1}{2\eta} \int_{t_0 - \eta}^{t_0 + \eta} \varphi(u(t)). \end{aligned}$$

Faisons tendre η vers 0, il vient :

$$\varphi(v(t_0)) + \langle \mathcal{H}u(t_0) + \frac{du}{dt}(t_0), v(t_0) - u(t_0) \rangle \geq \varphi(u(t_0)).$$

Comme l'ensemble des points de Lebesgue t_0 considérés est de complémentaire négligeable dans $]0, T[$, nous avons (S_4) .

*

REMARQUE 2.2 : Une conjecture.

Peut-on affirmer que (S_4) est équivalent à :

pour presque tout $t \geq 0$

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi(v) + \int_{\Omega} \frac{du}{dt}(t) (v - u(t)) + \langle \mathcal{H}u(t), v - u(t) \rangle &\geq \varphi(u(t)) \\ \forall v \in V, v &\leq Mu(t), \end{aligned} \right.$$

lorsque u vérifie (S_1) , (S_2) et (S_3) ?

Pour plus de clarté, nous nous limiterons dans le théorème suivant au cas où

$$D_S = \overline{D(C)} \cap L^\infty(\Omega)^+.$$

THEOREME 2.2 :

On suppose que $\Omega, V, M, \mathcal{A}$ et φ vérifient, outre les hypothèses du Chapitre I, l'hypothèse (H'_1) sur $\mathcal{A}$.

Alors, pour tout $u_0 \in D(C) \cap L^\infty(\Omega)^+$, $u(t) = S(t)u_0$ est solution forte de l'I. Q. V. d'évolution $IE(u_0)$.

Tout d'abord, nous exprimons, dans la proposition suivante, la forme variationnelle de la proposition 2.1. Cette proposition met en évidence l'existence et l'unicité de la solution d'une I. Q. V. d'évolution pénalisée associée à $E(u_0)$.

PROPOSITION 2.2 : Soient $T > 0$, $\epsilon > 0$ et $u_0^\epsilon \in D(A)$. Sous les seules hypothèses du Chapitre I,

1) $u_\epsilon(t) = S^\epsilon(t)u_0^\epsilon$ est l'unique solution de :

$$(2.12) \quad E_\epsilon(u_0^\epsilon) \left\{ \begin{array}{l} u_\epsilon \in C([0, \infty[, L^\infty(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; V), \quad \forall T > 0 \\ u_\epsilon(0) = u_0^\epsilon \\ \frac{du_\epsilon}{dt} \in L^\infty(]0, T[\times \Omega), \quad \forall T > 0 \\ \varphi(v) + \int_\Omega \frac{du_\epsilon}{dt}(t)(v - u_\epsilon(t)) + \langle \mathcal{A}u_\epsilon(t), v - u_\epsilon(t) \rangle \\ + \int_\Omega B_\epsilon(u_\epsilon(t))(v - u_\epsilon(t)) \geq \varphi(u_\epsilon(t)) \quad \text{p.p. } t \geq 0 \quad \forall v \in V. \end{array} \right.$$

2) On a les estimations :

$$(2.13) \quad \text{i) } \|u_\epsilon\|_{L^\infty(]0, T[\times \Omega)} \leq \|u_0^\epsilon\|_\infty$$

$$(2.14) \quad \text{ii) } \left\| \frac{du_\epsilon}{dt} \right\|_{L^\infty(]0, T[\times \Omega)} \leq \|C_\epsilon u_0^\epsilon\|_\infty$$

iii) si de plus $u_0^\epsilon \geq 0$

$$(2.15) \quad \|u_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; V)} \leq c \quad \text{où } c \text{ ne dépend que de } \|u_0^\epsilon\|_\infty \text{ et } \|C_\epsilon u_0^\epsilon\|_\infty.$$

preuve : 1) Nous avons vu, dans la proposition (2.1), que si $u_0^\epsilon \in D(A)$ alors :

$$u_\epsilon(t) = S^\epsilon(t)u_0^\epsilon \in D(A) \quad \text{p.p. } t \geq 0 \text{ et vérifie}$$

$$\frac{du_\epsilon}{dt}(t) + Au_\epsilon(t) + B_\epsilon(u_\epsilon(t)) \ni 0 \quad \text{p.p. } t \geq 0.$$

Utilisant, alors, la définition (1.1) de A , nous obtenons (2.12).

De plus, d'après (2.7), $\frac{du_\epsilon}{dt} \in L^\infty(]0, T[\times \Omega)$.

Montrons que $u_\epsilon \in L^\infty(0, T; V)$:

Dans (2.12), faisons $v = 0$, on obtient :

2.16)

$$\varphi(u_\epsilon(t)) + \langle \mathcal{A}u_\epsilon(t), u_\epsilon(t) \rangle \leq - \int_\Omega [B_\epsilon(u_\epsilon(t)) + \frac{du_\epsilon}{dt}(t)] u_\epsilon(t) \text{ p.p. } t \geq 0.$$

B_ϵ étant lipschitzienne dans $L^\infty(\Omega)$, de rapport $\frac{2}{\epsilon}$, compte tenu de (2.7) et du lemme 2.2, il existe $c_1 > 0$ tel que pour tout $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi(u_\epsilon(t)) + \langle \mathcal{A}u_\epsilon(t), u_\epsilon(t) \rangle + c \|u_\epsilon(t)\|_2^2 \\ \leq c_1 (\|C_\epsilon u_0^\epsilon\| + (\frac{2}{\epsilon} + |c|) \|u_0^\epsilon\|_\infty) \|u_\epsilon(t)\|_V \text{ p.p. } t \geq 0. \end{aligned}$$

Utilisant l'hypothèse de coercivité (H_4) , on en déduit que :

$$u_\epsilon \in L^\infty(0, T; V).$$

Toute solution $\bar{u}_\epsilon$ de $E_\epsilon(u_0^\epsilon)$ vérifie :

$$\frac{d\bar{u}_\epsilon}{dt}(t) + \mathcal{A}\bar{u}_\epsilon(t) + \delta\varphi(\bar{u}_\epsilon(t)) + B_\epsilon(\bar{u}_\epsilon(t)) \ni 0 \text{ p.p. } t \geq 0,$$

comme $\frac{d\bar{u}_\epsilon}{dt}(t) \in L^\infty(\Omega)$ p.p. $t \geq 0$, $\bar{u}_\epsilon$ vérifie :

$$\frac{d\bar{u}_\epsilon}{dt}(t) + C_\epsilon \bar{u}_\epsilon(t) \ni 0 \text{ p.p. } t \geq 0.$$

Alors l'unicité se montre comme dans la proposition 2.1.

2) L'estimation (2.13) provient du lemme (2.2) et l'estimation (2.14) provient de (2.7).

Si $u_0^\epsilon \geq 0$, d'après le lemme 2.2,

$$u_\epsilon(t) = S^\epsilon(t)u_0^\epsilon \geq S^\epsilon(t)0 = 0,$$

et (2.16) implique :

$$\varphi(u_\epsilon(t)) + \langle \mathcal{A}u_\epsilon(t), u_\epsilon(t) \rangle \leq - \int_\Omega \frac{du_\epsilon}{dt}(t) u_\epsilon(t) \text{ p.p. } t > 0,$$

d'où :

$$\varphi(u_\epsilon(t)) + \langle \mathcal{A}u_\epsilon(t), u_\epsilon(t) \rangle + c \|u_\epsilon(t)\|_2^2 \leq c_1 (\|C_\epsilon u_0^\epsilon\| + |c| \|u_0^\epsilon\|_\infty) \|u_\epsilon(t)\|_V,$$

alors, d'après l'hypothèse de coercivité (H_4) , il existe une constante c ne dépendant que de $\|C_\epsilon u_0^\epsilon\|$ et $\|u_0^\epsilon\|_\infty$ telle que :

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; V)} \leq c.$$

Avant de démontrer le théorème 2.2, nous démontrons le lemme technique ci-dessous :

LEMME 2.4 : Nous supposons que $\mathcal{A}$ vérifie les hypothèses (H_1) et (H'_1) .

Pour toute application mesurable u de $[0, +\infty[$ dans V , nous notons $\tilde{\mathcal{A}}u$ l'application mesurable de $[0, \infty[$ dans V' définie par :

$$(\tilde{\mathcal{A}}u)(t) = \mathcal{A}(u(t)).$$

Pour tout $T > 0$, nous avons :

1) $\tilde{\mathcal{A}}$ est une application partout définie de $L^\infty(0, T; V)$ dans $L^\infty(0, T; V')$,

2) $\tilde{\mathcal{A}}$ vérifie la propriété de "pseudo-monotonie" :

$$\Rightarrow \begin{cases} u_n \rightarrow u \text{ dans } \sigma(L^\infty(0, T; V), L^1(0, T; V')) \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \mathcal{A}u_n(t), u_n(t) - u(t) \rangle \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{\mathcal{A}}u_n \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}u \text{ dans } \sigma(L^\infty(0, T; V'), L^1(0, T; V)) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \mathcal{A}u_n(t), u_n(t) \rangle = \int_0^T \langle \mathcal{A}u(t), u(t) \rangle. \end{cases}$$

preuve : 1) résulte trivialement de l'hypothèse (H'_1)

2) supposons donc que :

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u \text{ dans } \sigma(L^\infty(0, T; V), L^1(0, T; V')) \\ \text{et } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \mathcal{A}u_n(t), u_n(t) - u(t) \rangle \leq 0. \end{cases}$$

Remarquons que la monotonie de $\mathcal{A}$ entraîne :

$$\int_0^T \langle \mathcal{A}u_n(t), u_n(t) - u(t) \rangle \geq \int_0^T \langle \mathcal{A}u(t), u_n(t) - u(t) \rangle.$$

$$\text{Or } \int_0^T \langle \mathcal{A}u(t), u_n(t) - u(t) \rangle \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Il en résulte :

$$(2.17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \mathcal{A}u_n(t), u_n(t) - u(t) \rangle = 0.$$

(1) On rappelle que si $u \in L^\infty(0, T; V)$ et $v \in L^\infty(0, T; V')$

$$\langle\langle v, u \rangle\rangle_{L^\infty(0, T; V'), L^1(0, T; V)} = \langle\langle v, u \rangle\rangle_{L^1(0, T; V'), L^\infty(0, T; V)} = \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle$$

Soient $v \in L^\infty(0, T; V)$ et $\lambda > 0$:

la monotonie de $\mathcal{A}$ entraîne :

$$\int_0^T \langle \mathcal{A}u_n(t), u_n(t) - u(t) + \lambda v(t) \rangle \geq \int_0^T \langle \mathcal{A}(u(t) - \lambda v(t)), u_n(t) - u(t) + \lambda v(t) \rangle.$$

Faisons tendre n vers l'infini et divisons par λ , il vient, compte tenu de (2.17) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \mathcal{A}u_n(t), v(t) \rangle \geq \int_0^T \langle \mathcal{A}(u(t) - \lambda v(t)), v(t) \rangle.$$

$$\text{Or } |\langle \mathcal{A}(u(t) - \lambda v(t)), v(t) \rangle| \leq \|\mathcal{A}(u(t) - \lambda v(t))\|_{V'} \|v(t)\|_V$$

$$\text{et } \|u(t) - \lambda v(t)\|_V \leq \|u\|_{L^\infty(0, T; V)} + \|v\|_{L^\infty(0, T; V)}$$

p.p. $t \in [0, T]$ et pour $0 < \lambda \leq 1$,

alors, d'après l'hypothèse (H'_1) , il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\|\mathcal{A}(u(t) - \lambda v(t))\|_{V'} \leq \delta \quad \text{p.p. } t \in [0, T] \text{ et pour } \lambda \text{ tel que } 0 < \lambda \leq 1,$$

par convergence dominée et compte tenu de l'hémicontinuité de $\mathcal{A}$,

il en résulte, en faisant tendre λ vers 0, que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \mathcal{A}u_n(t), v(t) \rangle \geq \int_0^T \langle \mathcal{A}u(t), v(t) \rangle, \quad \forall v \in L^\infty(0, T; V)$$

d'où :

$$(2.18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \mathcal{A}u_n(t), v(t) \rangle = \int_0^T \langle \mathcal{A}u(t), v(t) \rangle, \quad \forall v \in L^\infty(0, T; V).$$

D'autre part, $\{u_n\}$ est bornée dans $L^\infty(0, T; V)$ (cf. Yosida p.125

[24]), il en résulte, compte tenu de l'hypothèse (H'_1) que $\{\mathcal{A}u_n\}$

est borné dans $L^\infty(0, T; V')$, et puisque $L^\infty(0, T; V)$ est dense dans

$L^1(0, T; V)$, il résulte de (2.18) que :

$$\mathcal{A}u_n \rightarrow \mathcal{A}u \text{ dans } \sigma(L^\infty(0, T; V'), L^1(0, T; V)) \text{ (cf. Yosida p.125 [24])}.$$

De (2.17) on déduit alors que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \mathcal{A}u_n(t), u_n(t) \rangle = \int_0^T \langle \mathcal{A}u(t), u(t) \rangle.$$

*

preuve du théorème 2.2 :

Soit $u_0 \in D(C) \cap L^\infty(\Omega)^+$. Il existe $\lambda > 0$ et $f \in L^\infty(\Omega)$ tels que :

$$u_0 = J_\lambda f.$$

Soient : $u_0^\epsilon = J_\lambda^\epsilon f \geq u_0$

$$u_\epsilon(t) = S^\epsilon(t)u_0^\epsilon, \quad u(t) = S(t)u_0 \quad \forall t \geq 0.$$

Nous remarquons, d'après le lemme 2.2, que $u_\epsilon(t) \geq 0$ et $u(t) \geq 0$
 $\forall t \geq 0$.

D'autre part, d'après la proposition 2.2, et le lemme 1.4, nous avons :

(2.13)'

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty([0, T[\times \Omega)} \leq \|J_\lambda^\epsilon f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

$$\left\| \frac{du_\epsilon}{dt} \right\|_{L^\infty([0, T[\times \Omega)} \leq \|C_\epsilon J_\lambda^\epsilon f\|_\infty$$

or $(C_\epsilon)_\lambda \subset C_\epsilon J_\lambda^\epsilon$, et,

$$(C_\epsilon)_\lambda f = \frac{f - J_\lambda^\epsilon f}{\lambda}$$

d'où :

(2.14)'

$$\left\| \frac{du_\epsilon}{dt} \right\|_{L^\infty([0, T[\times \Omega)} \leq \|C_\epsilon J_\lambda^\epsilon f\|_\infty \leq \frac{2}{\lambda} \|f\|_\infty.$$

Nous avons, d'après la proposition 2.2 :

(2.12)

$$\begin{aligned} \varphi(v) + \int_\Omega \frac{du_\epsilon}{dt}(t) (v - u_\epsilon(t)) + \langle \mathcal{A} u_\epsilon(t), v - u_\epsilon(t) \rangle + \int_\Omega B_\epsilon u_\epsilon(t) (v - u_\epsilon(t)) \\ \geq \varphi(u_\epsilon(t)) \\ \text{p.p. } t \geq 0 \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Faisons $v = 0$:

Il existe, d'après (2.13)' et (2.14)', une constante $c_2 > 0$ telle que :

$$\int_\Omega B_\epsilon(u_\epsilon(t)) u_\epsilon(t) \leq - \int_\Omega \frac{du_\epsilon}{dt}(t) u_\epsilon(t) \leq c_2 \quad \text{p.p. } t \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (u_\epsilon(t) - M u_\epsilon(t))^+ u_\epsilon(t) \leq \epsilon c_2 \quad \text{p.p. } t \geq 0$$

$$\text{or } u(t) = L_\infty^* \lim_{\epsilon \searrow 0} u_\epsilon(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{cf. théorème 2.1})$$

$$M u(t) = L_\infty^* \lim_{\epsilon \searrow 0} M u_\epsilon(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{cf. propriété } M_2)$$

$$\text{et } (u_\epsilon(t) - M u_\epsilon(t))^+ u_\epsilon(t) \leq (u_\epsilon(t))^2 \leq \|f\|_\infty^2 \quad \forall t \geq 0.$$

Alors, en utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$\int_\Omega (u(t) - M u(t))^+ u(t) \leq 0 \quad \text{p.p. } t \geq 0 \Rightarrow u(t) \leq M u(t) \quad \text{p.p. } t \geq 0$$

et comme $u \in C([0, \infty[, L^\infty(\Omega))$, $u(t) \leq Mu(t) \quad \forall t \geq 0$.

Nous obtenons aussi, avec $v = 0$:

$$(2.19) \quad \varphi(u_\epsilon(t)) \leq - \int_\Omega \frac{du_\epsilon}{dt}(t) u_\epsilon(t) \leq c_2 \quad \text{p.p. } t > 0.$$

Or, d'après (2.15), (2.13)' et (2.14)', on déduit que $\{u_\epsilon, \epsilon > 0\}$

est bornée dans $L^\infty(0, T; V)$,

et comme $u_\epsilon \rightarrow u$ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ (cf. théorème 2.1), on

en tire : $u_\epsilon \rightarrow u$ dans $\sigma(L^\infty(0, T; V), L^1(0, T; V'))$.

De même $u_\epsilon(t) \rightarrow u(t)$ dans $L^2(\Omega) \quad \forall t \geq 0$ implique $u_\epsilon(t) \rightarrow u(t)$

dans $V \quad \text{p.p. } t \geq 0$.

Alors, d'après (2.19) :

$$\varphi(u(t)) \leq \lim_{\epsilon \searrow 0} \varphi(u_\epsilon(t)) \leq c_2 \quad \text{p.p. } t \geq 0 \Rightarrow \varphi(u) \in L^1(0, T).$$

D'autre part, d'après (2.14)', $\{\frac{du_\epsilon}{dt}\}$ est bornée dans $L^\infty(]0, T[\times \Omega)$ et

$\frac{du_\epsilon}{dt} \rightarrow \frac{du}{dt}$ dans $\mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega))$ alors :

$$\frac{du_\epsilon}{dt} \rightarrow \frac{du}{dt} \text{ dans } L^\infty(]0, T[\times \Omega).$$

Maintenant soit $v \in L^1(0, T; V)$ tel que $v(t) \leq Mu(t) \quad \text{p.p. } t \in [0, T]$

alors $B_\epsilon u_\epsilon(t)(v(t) - u_\epsilon(t)) \leq 0 \quad \text{p.p. } t \geq 0$, et dans 2.12 pour

presque tout $t \in]0, T[$ faisons $v = v(t)$ et intégrons de 0 à T,

il vient :

$$(2.20) \quad \int_0^T \varphi(v) + \int_0^T \int_\Omega \frac{du_\epsilon}{dt} (v - u_\epsilon) + \int_0^T \langle \mathcal{A}_\epsilon u_\epsilon(t), v(t) - u_\epsilon(t) \rangle \geq \int_0^T \varphi(u_\epsilon).$$

Nous pouvons, d'après ce qui précède, passer à la limite dans (2.20)

quand $\epsilon \searrow 0$, nous obtenons :

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \int_0^T \varphi(v) + \int_0^T \int_\Omega \frac{du}{dt} (v - u) + \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_0^T \langle \mathcal{A}_\epsilon u_\epsilon(t), v(t) - u_\epsilon(t) \rangle \\ \geq \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_0^T \varphi(u_\epsilon) \geq \int_0^T \lim_{\epsilon \searrow 0} \varphi(u_\epsilon) \geq \int_0^T \varphi(u) \end{aligned}$$

d'après le lemme de Fatou.

Faisons $v = u$ dans (2.21), il vient :

$$\overline{\lim}_{\epsilon \searrow 0} \int_0^T \langle \mathcal{A}_\epsilon u_\epsilon(t), u_\epsilon(t) - u(t) \rangle \leq 0$$

et d'après le lemme 2.4 :

$$\tilde{\mathcal{H}} u_\epsilon \rightarrow \tilde{\mathcal{H}} u \text{ dans } L^\infty(0, T; V')$$

$$\int_0^T \langle \mathcal{H} u_\epsilon(t), u_\epsilon(t) \rangle \rightarrow \int_0^T \langle \mathcal{H} u(t), u(t) \rangle$$

donc, (2.21) devient :

$$\int_0^T \varphi(v) + \int_0^T \int_\Omega \frac{du}{dt} (v - u) + \int_0^T \langle \mathcal{H} u(t), v(t) - u(t) \rangle \geq \int_0^T \varphi(u).$$

D'après le lemme 2.3, nous pouvons déduire de ce qui précède que $u(t) = S(t)u_0$ est solution forte de $IE(u_0)$.

*

REMARQUE 2.3 : Nous pouvons dans le cas où D_S est quelconque, énoncer le résultat suivant :

Pour $u_0 \in D_S \cap D(C)$, s'il existe $w \in D(\varphi)$ tel que : $w \leq Mu(t)$ p.p. $t \geq 0$ où $u(t) = S(t)u_0$, alors u est solution forte de l'I.Q.V. $IE(u_0)$.

Remarquons, avant d'indiquer une démonstration succincte de ce résultat, que l'hypothèse faite est vérifiée dans les exemples du Chapitre I lorsque l'on peut prendre $D_S = \overline{D(C)}$ (voir début du Chapitre II).

Nous reprenons les mêmes notations que dans la démonstration du théorème 2.2. La différence essentielle avec le théorème 2.2, c'est que nous ne pouvons plus "faire $v = 0$ ", d'où l'hypothèse.

Il faut donc vérifier les points suivants :

- 1) $\{u_\epsilon\}$ est bornée dans $L^\infty(0, T; V)$
- 2) $u(t) \leq Mu(t) \quad \forall t \geq 0$
- 3) $\varphi(u) \in L^1(0, T)$.

Cela s'obtient en faisant dans (2.12) $v = w$,

et en remarquant que $\int_\Omega B_\epsilon u_\epsilon(t) (w - u_\epsilon(t)) \leq 0$ p.p. $t \geq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} 1) \quad & \varphi(u_\epsilon(t)) - \varphi(w) + \langle \mathcal{H} u_\epsilon(t), u_\epsilon(t) - w \rangle + c \|u_\epsilon(t) - w\|_2^2 \\ & \leq \int_\Omega \frac{du_\epsilon}{dt}(t) (w - u_\epsilon(t)) + |c| \int_\Omega |u_\epsilon(t) - w|^2 \\ & \leq [c_1 \left(\frac{2}{\lambda} + |c|\right) \|f\|_\infty + |c| \|w\|_{V'}] \|u_\epsilon(t) - w\|_V \end{aligned}$$

p.p. $t \geq 0$.

Nous avons, compte tenu de la remarque 1.1 sur l'hypothèse (H_4) , le premier point.

$$2) \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (u_{\varepsilon}(t) - Mu_{\varepsilon}(t))^+ (u_{\varepsilon}(t) - w) \leq \langle \mathcal{J}_b w, w - u_{\varepsilon}(t) \rangle + \int_{\Omega} \frac{du_{\varepsilon}}{dt} (w - u_{\varepsilon}(t)) + \varphi(w) \quad \text{p.p. } t > 0$$

$$\varphi(u_{\varepsilon}(t)) \leq \langle \mathcal{J}_b w, w - u_{\varepsilon}(t) \rangle + \int_{\Omega} \frac{du_{\varepsilon}}{dt} (w - u_{\varepsilon}(t)) + \varphi(w) \quad \text{p.p. } t > 0.$$

On montre alors, compte tenu de 1), que le membre de droite est borné quand $\varepsilon \searrow 0$. On achève la démonstration comme dans le

théorème 2.2, en tenant compte de :

$$(u(t) - Mu(t))^+ (u(t) - w) \geq 0 \quad \text{p.p. } t \geq 0.$$

*

III. RESULTATS DE MAXIMALITE ET D'UNICITE :

1) Nous allons montrer que la solution $S(t)u_0$ de l'I.Q.V. $IE(u_0)$, lorsque $u_0 \in D(C) \cap L^\infty(\Omega)^+$, est solution maximum de cette I.Q.V. Plus généralement, nous montrons le résultat suivant relatif à un D_S quelconque :

(V_2') PROPOSITION 2.3 : On suppose que $\Omega, V, M, \mathcal{K}$ et φ vérifient, outre les hypothèses du Chapitre I, l'hypothèse (H_1') et l'hypothèse (V_2') sur V :
 "pour tout $v \in L^\infty(0, T; V)$ et tout $p \in P_0$, $p(v) \in L^\infty(0, T; V)$ ".
 Soit $u_0 \in D_S \cap D(C)$. S'il existe une solution forte $\bar{u}$ de l'I.Q.V. d'évolution $IE(u_0)$ alors $\bar{u}(t) \leq S(t)u_0$.

Remarquons tout d'abord que l'hypothèse faite sur V est vérifiée par les espaces classiques, en particulier ceux considérés dans les différents exemples.

preuve : Soit $u_0 \in D_S \cap D(C)$ et soient $\lambda > 0$, $f \in D_\lambda$ tels que $u_0 = J_\lambda f$.

Soient $u_0^\epsilon = J_\lambda^\epsilon f$ et $u_\epsilon(t) = S^\epsilon(t)u_0^\epsilon$.

Alors la proposition résulte du théorème 2.1 et des lemmes suivants.

*

(2.22) LEMME 2.5 : Avec les notations ci-dessus, et sans autre hypothèse que celles du Chapitre I, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite $\{u_{\epsilon, n}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}([0, \infty[, L^\infty(\Omega))$ vérifiant :

1)
$$\begin{cases} u_{\epsilon, n}(0) = u_0^\epsilon \\ u_{\epsilon, n} \in \bigcap_{1 < p < \infty} W^{1, \infty}([0, T[, L^p(\Omega)) \quad \forall T > 0 \\ \frac{du_{\epsilon, n}}{dt}(t) + Au_{\epsilon, n}(t) + \beta_\epsilon(u_{\epsilon, n}(t) - Mu_{\epsilon, n-1}(t)) \ni 0 \text{ p.p. } t > 0 \text{ si } n \geq 1 \\ \left(\text{resp. } \frac{du_{\epsilon, 0}}{dt}(t) + Au_{\epsilon, 0}(t) \ni 0 \text{ p.p. } t > 0 \text{ si } n = 0 \right). \end{cases}$$

2) Pour tout $T > 0$, $u_{\epsilon, n} \rightarrow u_\epsilon$ dans $\mathcal{C}([0, T], L^\infty(\Omega))$.

LEMME 2.6 : Sous les hypothèses de la proposition 2.3, et si $\bar{u}$ est une solution forte de $IE(u_0)$; alors pour tout $\epsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$\bar{u}(t) \leq u_{\epsilon,n}(t) \quad \forall t \geq 0.$$

preuve du lemme 2.5 : Fixons $\epsilon > 0$.

1) Construisons la suite $\{u_{\epsilon,n}, n \geq 0\} \subset C([0, +\infty[, L^\infty(\Omega))$ par récurrence sur n :

- On définit $u_{\epsilon,0}$ en posant : $u_{\epsilon,0}(t) = S^A(t)u_0^\epsilon$,
où $S^A(t)$ est le semi-groupe continu de T -contractions, défini sur $\overline{D(A)}$, associé à l'opérateur m - T -accrétif A .

Comme $u_0^\epsilon \in D(A)$, nous avons un résultat analogue, pour $u_{\epsilon,0}$, à celui de la proposition 2.1 et donc $u_{\epsilon,0}$ vérifie (2.22). D'autre part, nous avons vu, ce qui est essentiel dans la démonstration, que $u_{\epsilon,0}$ est lipschitzienne de $[0, +\infty[$ dans $L^\infty(\Omega)$.

- Soit $n \geq 1$, supposons $u_{\epsilon,n-1}$ définie, vérifiant (2.22) et lipschitzienne, de rapport $\delta_{\epsilon,n-1}(T)$, de $[0, T]$ dans $L^\infty(\Omega)$, $\forall T > 0$.

Notons $\tilde{B}_{\epsilon,n}$ l'application de $[0, +\infty[\times L^\infty(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$ définie par :

$$(2.23) \quad \tilde{B}_{\epsilon,n}(t, v) = \beta_\epsilon(v - Mu_{\epsilon,n-1}(t)) \quad \forall t \geq 0, \quad \forall v \in L^\infty(\Omega).$$

(i) Pour tout $t \geq 0$, $B_{\epsilon,n}(t) = \tilde{B}_{\epsilon,n}(t, \cdot)$ est une application de $L^\infty(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$ partout définie, lipschitzienne et T -accrétive (démonstration identique à celle du lemme 1.3).

(ii) $\tilde{B}_{\epsilon,n}$ est continue sur $[0, +\infty[\times L^\infty(\Omega)$, plus précisément :

$$(2.24) \quad \|\tilde{B}_{\epsilon,n}(t, v) - \tilde{B}_{\epsilon,n}(t, \hat{v})\|_\infty \leq \frac{1}{\epsilon} \|v - \hat{v}\|_\infty \quad \forall t \geq 0, \quad \forall v, \hat{v} \in L^\infty(\Omega)$$

$$(2.25) \quad \begin{aligned} \|\tilde{B}_{\epsilon,n}(t, v) - \tilde{B}_{\epsilon,n}(s, v)\|_\infty &\leq \frac{1}{\epsilon} \|u_{\epsilon,n-1}(t) - u_{\epsilon,n-1}(s)\|_\infty \\ &\leq \frac{\delta_{\epsilon,n-1}(T)}{\epsilon} (t - s) \end{aligned}$$

$$\forall v \in L^\infty(\Omega), \quad \forall T > 0, \quad \forall t, s \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Les deux inégalités proviennent de ce que β_ϵ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ de rapport $\frac{1}{\epsilon}$, M est une contraction de $L^\infty(\Omega)$ et de l'hypothèse de récurrence sur $u_{\epsilon, n-1}$.

D'autre part, $A + B_{\epsilon, n}(t)$ est un opérateur m - T -accrétif de $L^\infty(\Omega)$ pour tout $t \geq 0$ (cf. (i) et corollaire de la prop. 0.2); alors, d'après Pierre (cf. théorème III.3 et corollaire I.7 de [23]), il

existe une et une seule ℓ -solution sur $[0, +\infty[$ dans $L^\infty(\Omega)$ du problème de Cauchy $CP(A + B_{\epsilon, n}(\cdot), 0, u_o^\epsilon)$. Notons-la $u_{\epsilon, n}$.

Alors, $u_{\epsilon, n} \in \mathcal{C}([0, +\infty[, L^\infty(\Omega))$, $u_{\epsilon, n}(0) = u_o^\epsilon$. $\tilde{B}_{\epsilon, n}$ étant continue sur $[0, +\infty[\times L^\infty(\Omega)$, d'après Pierre (cf. [23], prop. I.6), $u_{\epsilon, n}$ est ℓ -solution sur $[0, +\infty[$ dans $L^\infty(\Omega)$ de $CP(A, g_n, u_o^\epsilon)$ où $g_n(t) = -\tilde{B}_{\epsilon, n}(t, u_{\epsilon, n}(t)) = -\beta_\epsilon(u_{\epsilon, n}(t) - Mu_{\epsilon, n-1}(t))$ et par le lemme I.4 de [23] pour tout $T > 0$, $u_{\epsilon, n}$ est la bonne solution sur $[0, T]$ de $CP(A, g_n, u_o^\epsilon)$, alors, d'après (2.25) et la prop. 1.12 de [4], $u_{\epsilon, n}$ est lipschitzienne de $[0, T]$ dans $L^\infty(\Omega)$. Nous pouvons alors, par un raisonnement analogue à celui de la proposition 2.1, montrer que $u_{\epsilon, n}$ vérifie 2.22.

2) Montrons que $u_\epsilon(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{\epsilon, n}(t)$ dans $\mathcal{C}([0, T], L^\infty(\Omega)) \forall T > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, toujours d'après la proposition I.6 de [23],

$u_{\epsilon, n+1}$ est ℓ -solution sur $[0, +\infty[$ de $CP(A + B_{\epsilon, n}(\cdot), h_n, u_o^\epsilon)$ où $h_n(t) = \beta_\epsilon(u_{\epsilon, n+1}(t) - Mu_{\epsilon, n-1}(t)) - \beta_\epsilon(u_{\epsilon, n+1}(t) - Mu_{\epsilon, n}(t))$. Comme $u_{\epsilon, n}$ est ℓ -solution sur $[0, +\infty[$ de $CP(A + B_{\epsilon, n}(\cdot), 0, u_o^\epsilon)$, d'après la proposition I.6 de [23], nous avons :

$$\begin{aligned} \|u_{\epsilon, n+1}(t) - u_{\epsilon, n}(t)\|_\infty &\leq \int_0^t \|h_n(\tau)\|_\infty d\tau \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \|Mu_{\epsilon, n-1}(\tau) - Mu_{\epsilon, n}(\tau)\|_\infty d\tau \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

$$\|u_{\epsilon, n+1}(t) - u_{\epsilon, n}(t)\|_\infty \leq \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \|u_{\epsilon, n}(\tau) - u_{\epsilon, n-1}(\tau)\|_\infty d\tau \quad \forall t \geq 0.$$

D'où :

$$\|u_{\epsilon, n+1}(t) - u_{\epsilon, n}(t)\|_{\infty} \leq \frac{t^n}{\epsilon^n n!} \|u_{\epsilon, 1} - u_{\epsilon, 0}\|_{\mathcal{C}([0, T], L^{\infty}(\Omega))} \\ \forall 0 \leq t \leq T.$$

On en déduit aisément que $\{u_{\epsilon, n}, n \geq 0\}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}([0, T], L^{\infty}(\Omega))$ et donc converge vers $\bar{u}_{\epsilon}$ dans $\mathcal{C}([0, T], L^{\infty}(\Omega))$.

D'autre part :

$$\|\beta_{\epsilon}(u_{\epsilon, n}(t) - Mu_{\epsilon, n-1}(t)) - \beta_{\epsilon}(\bar{u}_{\epsilon}(t) - M\bar{u}_{\epsilon}(t))\|_{\infty} \\ \leq \frac{1}{\epsilon} [\|u_{\epsilon, n}(t) - \bar{u}_{\epsilon}(t)\|_{\infty} + \|u_{\epsilon, n-1}(t) - \bar{u}_{\epsilon}(t)\|_{\infty}].$$

On en déduit que :

$$g_n(t) = -\beta_{\epsilon}(u_{\epsilon, n}(t) - Mu_{\epsilon, n-1}(t)) \rightarrow \bar{g}(t) = -\beta_{\epsilon}(\bar{u}_{\epsilon}(t) - M\bar{u}_{\epsilon}(t)) \\ \text{dans } \mathcal{C}([0, T], L^{\infty}(\Omega)), \text{ donc, d'après Pierre (cf. [23] lemme 1.6),} \\ \bar{u}_{\epsilon} \text{ est } \ell\text{-solution sur } [0, \infty[\text{ de } CP(A, \bar{g}, u_0^{\epsilon}) \text{ et donc de} \\ CP(A + B_{\epsilon}, 0, u_0^{\epsilon}) \text{ sur } [0, +\infty[\text{ et, par unicité de la } \ell\text{-solution,} \\ \bar{u}_{\epsilon}(t) = u_{\epsilon}(t) \quad \forall t \geq 0.$$

*

REMARQUE 2.4 : En fait, $u_{\epsilon}(t) = L_{*}^{\infty} \cdot \lim_{n \uparrow} u_{\epsilon, n}(t)$.

Il suffit de remarquer que la suite $\{u_{\epsilon, n}\}$ est décroissante. Cela se fait par récurrence sur n :

$$u_{\epsilon, 0} \text{ est } \ell\text{-solution de } CP(A, 0, u_0^{\epsilon}) \\ u_{\epsilon, 1} \text{ est } \ell\text{-solution de } CP(A, g_1, u_0^{\epsilon})$$

et donc, comme A est T -accrétif, $u_{\epsilon, 0}$ et $u_{\epsilon, 1}$ sont solutions T -intégrales des mêmes problèmes de Cauchy (cf. [4] prop. 1.27), d'où :

$$\|(u_{\epsilon, 1}(t) - u_{\epsilon, 0}(t))^{+}\|_{\infty} \leq \int_0^t \|g_1(\tau)^{+}\|_{\infty} d\tau \\ \text{et comme } g_1(\tau) \leq 0 \Rightarrow u_{\epsilon, 1}(t) \leq u_{\epsilon, 0}(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Maintenant, si l'on suppose $u_{\epsilon, n}(t) \leq u_{\epsilon, n-1}(t)$, de la même manière,

$u_{\epsilon, n}$ est solution T-intégrale de $CP(A + B_{\epsilon, n}(\cdot), 0, u_0^\epsilon)$

$u_{\epsilon, n+1}$ est solution T-intégrale de $CP(A + B_{\epsilon, n}(\cdot), h_n, u_0^\epsilon)$

où $h_n(t) = \beta_\epsilon(u_{\epsilon, n+1}(t) - Mu_{\epsilon, n-1}(t)) - \beta_\epsilon(u_{\epsilon, n+1}(t) - Mu_{\epsilon, n}(t))$,

et donc :

$$\|(u_{\epsilon, n+1}(t) - u_{\epsilon, n}(t))^+\|_\infty \leq \int_0^t \|(h_n(\tau))^+\|_\infty$$

or, $h_n(t) \leq 0 \quad \forall t \geq 0$ d'où $u_{\epsilon, n+1}(t) \leq u_{\epsilon, n}(t) \quad \forall t \geq 0$.

*

preuve du lemme 2.6 : $\epsilon > 0$ est fixé.

Soit $\bar{u}$ une solution forte de $IE(u_0)$. Montrons par récurrence que $\bar{u}(t) \leq u_{\epsilon, n}(t) \quad \forall t \geq 0$.

D'après la démonstration précédente, nous avons un résultat analogue, pour $u_{\epsilon, n}$, à celui de (1) de la proposition 2.2, en particulier :

$$u_{\epsilon, n} \in L^\infty(0, T; V) \quad \forall T > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(2.26) \quad \begin{aligned} \varphi(v) + \int_\Omega \frac{du_{\epsilon, n}}{dt}(t) (v - u_{\epsilon, n}(t)) + \langle \mathcal{A}_{u_{\epsilon, n}}(t), v - u_{\epsilon, n}(t) \rangle \\ + \int_\Omega \beta_\epsilon(u_{\epsilon, n}(t) - Mu_{\epsilon, n-1}(t)) (v - u_{\epsilon, n}(t)) \geq \varphi(u_{\epsilon, n}(t)) \end{aligned}$$

p.p. $t > 0 \quad \forall v \in V$,

le terme en β_ϵ n'existant pas pour $n = 0$.

Soit $p \in \mathcal{P}_0$ tel que $p(r) = 0 \Leftrightarrow r \leq 0$.

Faisons dans l'inégalité précédente, pour tout t ,

$$v = v(t) = u_{\epsilon, n}(t) + p(\bar{u}(t) - u_{\epsilon, n}(t)) \in V \quad \text{p.p. } t \geq 0.$$

Alors, si pour $n \geq 1$, l'on suppose : $\bar{u}(t) \leq u_{\epsilon, n-1}(t), \quad \forall t \geq 0$,

nous avons : $\bar{u}(t) \leq M\bar{u}(t) \leq Mu_{\epsilon, n-1}(t)$, et du choix de p ,

on déduit que : $\beta_\epsilon(u_{\epsilon, n}(t) - Mu_{\epsilon, n-1}(t)) p(\bar{u}(t) - u_{\epsilon, n}(t)) = 0$.

L'inégalité (2.26) devient :

$$(2.27) \quad \begin{aligned} \varphi(u_{\epsilon, n}(t) + p(\bar{u}(t) - u_{\epsilon, n}(t))) + \int_\Omega \frac{du_{\epsilon, n}}{dt}(t) p(\bar{u}(t) - u_{\epsilon, n}(t)) \\ + \langle \mathcal{A}_{u_{\epsilon, n}}(t), p(\bar{u}(t) - u_{\epsilon, n}(t)) \rangle \geq \varphi(u_{\epsilon, n}(t)) \end{aligned}$$

p.p. $t > 0$

(valable pour $n = 0$).

Remarquons que, puisque $u_{\epsilon, n}(t) \in D(A)$ p.p. $t \geq 0$ et $\varphi(\bar{u}) \in L^1(0, T)$,
 $u_{\epsilon, n}(t) + p(\bar{u}(t) - u_{\epsilon, n}(t)) \in D(\varphi)$ (cf. (H_3)).

D'autre part, dans l'inéquation vérifiée par $\bar{u}$, faisons :

$$\bar{v}(t) = \bar{u}(t) - p(\bar{u}(t) - u_{\epsilon, n}(t)) \in L^\infty(0, T; V) \text{ d'après l'hypothèse } V_2',$$

$$\bar{v}(t) \leq \bar{u}(t) \leq M\bar{u}(t),$$

$\varphi(\bar{v}) \in L^1(0, T)$ (admettons-le pour l'instant) nous obtenons :

$$(2.28) \quad \begin{aligned} \varphi(\bar{u}(t) + p(\bar{u}(t) - u_{\epsilon, n}(t))) - \int_{\Omega} \frac{d\bar{u}}{dt}(t) p(\bar{u}(t) - u_{\epsilon, n}(t)) \\ - \langle \mathcal{A}\bar{u}(t), p(\bar{u}(t) - u_{\epsilon, n}(t)) \rangle \geq \varphi(\bar{u}(t)) \end{aligned}$$

p.p. $t \in]0, T[$.

Additionnons (2.27) et (2.28), compte tenu de l'hypothèse (H_3) , nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \left[\frac{d\bar{u}}{dt}(t) - \frac{du_{\epsilon, n}}{dt}(t) \right] p(\bar{u}(t) - u_{\epsilon, n}(t)) \leq 0.$$

Alors, pour tout $j \in C^1(\mathbb{R})$ tel que $j' \in \mathcal{P}_0$ avec $j(r) = 0 \Leftrightarrow r \leq 0$, il vient :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} j(\bar{u}(t) - u_{\epsilon, n}(t)) \leq 0.$$

En intégrant de 0 à t , on obtient :

$$\int_{\Omega} j(\bar{u}(t) - u_{\epsilon, n}(t)) \leq \int_{\Omega} j(u_0 - u_0^\epsilon) = 0 \quad \text{car} \quad u_0 \leq u_0^\epsilon$$

d'où : $j(\bar{u}(t) - u_{\epsilon, n}(t)) = 0 \quad \forall t \geq 0$ car $j \geq 0$ et $\bar{u}$ et $u_{\epsilon, n}$ sont continues.

Et par le choix de j , cela entraîne : $\bar{u}(t) \leq u_{\epsilon, n}(t)$.

Il reste à montrer que $\varphi(\bar{v}) \in L^1(0, T)$; d'après les hypothèses (H_1') et (H_3) , il suffit de montrer que $\varphi(u_{\epsilon, n}) \in L^1(0, T)$.

Dans (2.26), faisons $v = 0$, compte tenu de la monotonie de $\mathcal{A}$, il vient :

$$\varphi(u_{\epsilon, n}(t)) \leq - \int_{\Omega} \frac{du_{\epsilon, n}}{dt}(t) u_{\epsilon, n}(t) - \int_{\Omega} \beta_{\epsilon}(u_{\epsilon, n}(t) - Mu_{\epsilon, n-1}(t)) u_{\epsilon, n}(t)$$

Or, sur $[0, T]$, $u_{\epsilon, n}$ est lipschitzienne de rapport $\delta_{\epsilon, n}(T)$, d'où :

$$\|u_{\epsilon, n}(t)\|_{\infty} \leq \delta_{\epsilon, n}(T) \cdot t + \|u_0^\epsilon\|_{\infty} \leq T \delta_{\epsilon, n}(T) + \|u_0^\epsilon\|_{\infty}$$

et $\left\| \frac{du_{\epsilon, n}}{dt}(t) \right\|_{\infty} \leq \delta_{\epsilon, n}(T)$ (cf. preuve de la proposition 2.1).

D'autre part :

$$\left\| \beta_{\epsilon} (u_{\epsilon, n}(t) - M u_{\epsilon, n-1}(t)) \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{\epsilon} [\|u_{\epsilon, n}(t)\|_{\infty} + \|u_{\epsilon, n-1}(t)\|_{\infty} + \|M0\|_{\infty}].$$

Ces majorations nous permettent d'affirmer que $\varphi(u_{\epsilon, n}) \in L^{\infty}(0, T)$
 $\forall n \in \mathbb{N}$.

*

2) Nous allons maintenant donner un résultat d'unicité de la solution forte de l'I. Q. V. $IE(u_0)$, dans un cas bien particulier.

PROPOSITION 2.4 : Sous les hypothèses du Chapitre I et de (V_2') , si nous supposons $\varphi \equiv 0$, $\mathcal{A}$ linéaire et M donné par : $Mu = k + I(u)$ où $k \in L^{\infty}(\Omega)^+$ tel que $\inf \text{ess } k > 0$, alors pour tout $u_0 \in L^{\infty}(\Omega)^+ \cap V$, il y a unicité, si elle existe, de la solution positive forte de l'I. Q. V. d'évolution $IE(u_0)$.

preuve : Soient u et $\bar{u}$ deux solutions positives, fortes de $IE(u_0)$.

Supposons que $\bar{u} \not\leq u$ sur $[0, T] \times \Omega$, alors il existe un plus grand réel α tel que $\alpha \bar{u} \leq u$ sur $[0, T] \times \Omega$, et il vérifie $0 \leq \alpha < 1$.

Nous avons vu, dans le Chapitre I, lors de la démonstration de la propriété 6 de M , que pour tout β vérifiant

$$\alpha < \beta < \frac{m + \alpha \|\bar{u}(t)\|_{\infty}}{m + \|\bar{u}(t)\|_{\infty}} \leq 1 \quad \text{où } m = \inf \text{ess } k,$$

alors $\beta M \bar{u}(t) \leq M(\alpha \bar{u}(t))$.

Or $\bar{u}$ étant continu de $[0, \infty[$ dans $L^{\infty}(\Omega)$, nous pouvons trouver β tel que :

$$\alpha < \beta < \inf_{t \in [0, T]} \frac{m + \alpha \|\bar{u}(t)\|_{\infty}}{m + \|\bar{u}(t)\|_{\infty}} \leq 1$$

et alors $\beta M \bar{u}(t) \leq M(\alpha \bar{u}(t)) \quad \forall t \in [0, T]$.

Nous avons, en posant $\hat{u} = \frac{u}{\beta}$:

$$\left\langle \frac{d\hat{u}}{dt}(t) + \mathcal{A}\hat{u}(t), v(t) - \hat{u}(t) \right\rangle \geq 0 \quad \text{p.p. } t \in]0, T[, \quad \forall v \in L^1(0, T; V)$$

$$v(t) \leq \frac{1}{\beta} M u(t) \quad \text{p.p. } t \in]0, T[.$$

Faisons $v = \hat{u} + p(\bar{u} - \hat{u})$ où $p \in \mathcal{P}_0$ $p(r) = 0 \Leftrightarrow r \leq 0$,

alors $v \leq \bar{u} v \hat{u}$ car $p(r) \leq r$ si $r \geq 0$.

$$\text{Or } \beta \bar{u} \leq \beta M \bar{u} \leq M(\alpha \bar{u}) \leq M u$$

$$\text{d'où : } v(t) \leq \frac{1}{\beta} M u(t) \quad \text{p.p. } t \in]0, T[.$$

D'autre part, nous avons :

$$\left\langle \frac{d\bar{u}}{dt}(t) + \mathcal{A}\bar{u}(t), v(t) - \bar{u}(t) \right\rangle \geq 0 \quad \text{p.p. } t \in]0, T[\quad \forall v \in L^1(0, T; V)$$

$$v(t) \leq M \bar{u}(t) \quad \text{p.p. } t.$$

Faisons $v = \bar{u} - p(\bar{u} - \hat{u})$ $p \in \mathcal{P}_0$ et $p(r) = 0 \Leftrightarrow r \leq 0$,

alors $v(t) \leq \bar{u}(t) \leq M \bar{u}(t)$.

Nous obtenons alors les inégalités suivantes :

$$\left\langle \frac{d\hat{u}}{dt}(t) + \mathcal{A}\hat{u}(t), p(\bar{u}(t) - \hat{u}(t)) \right\rangle \geq 0 \quad \text{p.p. } t \in]0, T[$$

$$\left\langle \frac{d\bar{u}}{dt}(t) + \mathcal{A}\bar{u}(t), -p(\bar{u}(t) - \hat{u}(t)) \right\rangle \geq 0 \quad \text{p.p. } t \in]0, T[.$$

Il vient, en additionnant, compte tenu de l'hypothèse (H_3) :

$$\left\langle \frac{d\bar{u}}{dt}(t) - \frac{d\hat{u}}{dt}(t), p(\bar{u}(t) - \hat{u}(t)) \right\rangle \leq 0 \quad \text{p.p. } t \in]0, T[.$$

Nous avons déjà vu, au cours de la démonstration du lemme 2.6,

$$\text{que cela entraînait : } \bar{u}(t) \leq \hat{u}(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

$$\text{c'est-à-dire : } \beta \bar{u}(t) \leq u(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

ce qui est contraire au choix de α et β , donc $\bar{u} \leq u$ sur $[0, T] \times \Omega$.

Nous obtenons, en inversant le rôle de u et de $\bar{u}$,

$$\bar{u} = u \text{ sur } [0, T] \times \Omega \text{ et donc } \bar{u} = u \text{ sur } [0, +\infty[\times \Omega.$$

*

REMARQUE 2.5 : En fait, seule la propriété d'homogénéité de $\mathcal{A}$ nous a servi.

BIBLIOGRAPHIE

=====

- [1] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG : Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I *comm. Pure Appl. Math.*, 12 (1959), pp. 623-727.
- [2] H. ATTOUCH, A. DAMLAMIAN : Application des méthodes de convexité et monotonie à l'étude de certaines équations quasi-linéaires. *Proceedings. Royal Soc. Edinburgh*.
- [3] L. BARTHELEMY, F. CATTE : Application de l'accrétivité dans L^∞ à l'étude de certaines inéquations quasi-variationnelles (A paraître).
- [4] PH. BENILAN : *Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications*. Thèse Orsay (1972).
- [5] PH. BENILAN : *Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque*. Orsay.
- [6] PH. BENILAN : Principe du maximum et perturbation d'opérateurs accréatifs dans $L^1(\Omega)$.
- [7] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS : Nouvelle formulation de problèmes de contrôle impulsif et applications. *C.R. Acad. Sc. Paris*, t.276, série A, (1973), pp.1189-1192.
- [8] A. BENSOUSSAN, M. GOURSAT, J.L. LIONS : Contrôle impulsif et inéquations quasi-variationnelles stationnaires. *C.R. Acad. Sc. Paris*, t.276, série A, (1973), pp.1279-1284.

- [9] H. BREZIS : *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. Math. Studies 5, North-Holland (1973).
- [10] H. BREZIS : *Non linear perturbations of monotone operators*. Tech. Report 25, University of Kansas, Lawrence, Kansas (1972).
- [11] H. BREZIS : Problèmes unilatéraux. *Jour. Math. pures et Appl.*, t. 51, fasc. 1, (1972), pp. 1-168.
- [12] H. BREZIS : Seuil de régularité pour certains problèmes unilatéraux. *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 273, série A, (1971), pp. 35-37.
- [13] M.G. CRANDALL : An introduction to evolution governed by accretive operators. *Proceedings of the International Symposium on Dynamical Systems*, Brown University, Providence, (1974).
- [14] M.G. CRANDALL, T.M. LIGGETT : Generation of semi-groups of non linear transformations in general Banach spaces. *Amer. Jour. Math.* 93 (1977), pp. 265-298.
- [15] N. DUNFORD, J. SCHWARTZ : *Linear operators*, I, Interscience, New-York, 1958.
- [16] M.G. GARRONI, G.M. TROIANIELLO : Some Regularity results and a priori estimates for solutions of variational and quasi-variational inequalities. A survey. In *Proc. of the International meeting on Recent Methods in Non Linear Analysis*. Pittagora Editrice. Bologne (1979), pp. 493-518.
- [17] K.S. HÂ : *Sur des semi-groupes non lineaires dans les espaces $L^\infty(\Omega)$* . Thèse 3° cycle, Paris VI (1976).

- [18] Y. KOBAYASHI : Difference approximation of Cauchy problems for quasi-dissipative operators and generation of non linear semi-groups. *J. Math. Soc. Japan*, vol. 27, n°4 (1975), pp. 640-665.
- [19] T.H. LAETSCH : A uniqueness theorem for elliptic quasi-variational inequalities. *Jour. of Funct. Anal.* 18, (1975), pp. 286-287.
- [20] J.L. LIONS : *Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires*. Etudes Math., Dunod, Paris, 1969.
- [21] R.H. MARTIN, Jr. : Non linear Perturbations of Uncoupled Systems of Elliptic Operators. *Math. Ann.* 211 (1974), pp. 155-169.
- [22] F. MIGNOT, J.P. PUEL : Inéquations d'évolution parabolique avec convexes dépendant du temps. Application aux inéquations quasi-variationnelles d'évolution. *Arch. for Rat. Mech. and Ana.* vol. 64 n°1 (1977), pp. 59-91.
- [23] M. PIERRE : *Generations et perturbations de semi-groupes de contractions non lineaires*. Thèse 3° cycle, Paris VI, (1976).
- [24] K. YOSIDA : *Functional Analysis*. Springer-Verlag, 1965.

